Explorativ övning 8

POLYNOM OCH POLYNOMEKVATIONER*

Syftet med denna övning är att repetera gymnasiekunskaper om polynom och polynomekvationer samt att bekanta sig med en del nya egenskaper hos polynom. Vi kommer att undersöka hur olika egenskaper hos polynom beror på deras koefficienter. Därför betraktar vi polynom med koefficienter i olika talområden: $\mathbb{Z}$ (heltaliga koefficienter), $\mathbb{Q}$ (rationella koefficienter), $\mathbb{R}$ (reella koefficienter), $\mathbb{C}$ (komplexa koefficienter). Vi betecknar med $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ alla polynom med koefficienter i respektive $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$. Om R betecknar ett av dessa talområden så skriver vi $R[X]$ för alla polynom med koefficienter i R. $R[X]$ kallas **polynomringen över** R. De viktigaste begreppen i detta avsnitt är

- Delbarhet av polynom
- Divisionsalgoritmen
- Största gemensamma delaren
- Reducibla och irreducibla polynom
- Nollställen till polynom (dubbla rötter, multipla rötter)
- Faktoruppdelningar av polynom i olika polynomringar

Vi följer kapitel 7 i Vretblads bok.

Övning A

Den första övningen ägnas åt divisionsalgoritmen. Om $f(X)$ och $g(X) \neq 0$ är två polynom så betecknar vi med $q(X)$ och $r(X)$ kvoten och resten vid division av $f(X)$ med

*MAL 200, ht 99

$g(X)$. Man har $f(X) = g(X)q(X) + r(X)$, där $\operatorname{grad} r(X) < \operatorname{grad} g(X)$ eller $r(X) = 0$.

1. Bestäm kvoten och resten vid division av följande polynom:

   (a) $f(X) = X^4 + 5X^3 - 3X + 2$, $g(X) = X^2 - 1$;

   (b) $f(X) = 5X^3 - 2X + 1$, $g(X) = X^2 + X$;

   (c) $f(X) = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 3$, $g(X) = X^2 + 2X + 3$.

2. Vad kan man säga om resten vid division av ett polynom $f(X)$ med ett polynom $X - a$? Vilken grad har resten? Bevisa att resten av $f(X)$ vid dividsion med $X - a$ är lika med $f(a)$.

   Ledning. Enligt divisionsalgoritmen är $f(X) = (X - a)q(X) + r(X)$. Vad kan man säga om $r(X)$? Försök beräkna resten genom insättningar $X = a$.

3. Beräkna resten vid division av $f(X)$ med $X - a$ då

   (a) $f(X) = X^3 - 2X^2 + 8X + 5$, $a = 3$;

   (b) $f(X) = 3X^4 + 5X^2 - 4X - 11$, $a = -1$.

   Du behöver inte utföra divisionsalgoritmen!

Övning B

1. Vad säger faktorsatsen? Försök förklara hur man utnyttjar faktorsatsen för att lösa polynomekvationer?

2. Lös ekvationen $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0$ som har en rot $X = 1$.

3. Lös uppgift 7.9 (706) i Vretblads bok.

Övning C

Låt $K[X]$ vara en av polynomringarna $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$.

1. Vad menas med ett reducibelt, respektive irreducibelt, polynom i $K[X]$?

2. Om möjligt, uppdela följande polynom i produkt av minst två polynom av lägre grad i givna polynomringar:

   (a) $f(X) = X^4 - 1$ i $\mathbb{Q}[X]$,

   (b) $f(X) = X^4 + 4$ i $\mathbb{Q}[X]$,

   (c) $f(X) = X^2 + 1$ i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$,

   (d) $f(X) = X^4 + 2X^2 + 9$ i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$.

   Vilka av polynomen är irreducibla i respektive polynomring?

3. Visa att följande polynom är irreducibla i givna polynomringar (dvs inte kan faktoruppdelas i produkt av två polynom av lägre grad):

   (a) $X^3 - 2$ i $\mathbb{Q}[X]$,

   (b) $X^2 + 2X + 2$ i $\mathbb{R}[X]$,

   (c) $X^4 + 1$ i $\mathbb{Q}[X]$.

   Ledning. Nästa uppgift kan underlätta denna. Om ett polynom har heltaliga koefficienter och kan uppdelas i produkt av två polynom av lägre grad med rationella koefficienter så kan det också uppdelas i en produkt av två polynom med heltaliga koefficienter och samma grad. Detta påstående kallas "Gauss Lemma" och visas t ex i kursen "Algebraisk talteori". Du får använda detta (ganska självklara) resultat i (c).

4. Låt $f \in K[X]$. Visa att

   (a) Om $\operatorname{grad} f \geq 2$ och f har ett nollställe i K så är f reducibelt i $K[X]$.

   (b) Om $\operatorname{grad} f = 2$ eller 3 så är f reducibelt i $K[X]$ då och endast då f har nollställen i K.

   (c) Konstruera ett exempel som visar att (b) inte gäller då $\operatorname{grad} f = 4$.

5. Faktoruppdela de givna polynomen i produkt av irreducibla i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$:

   (a) $X^4 - 1$,

   (b) $X^4 + X^2 - 6$,

   (c) $X^6 + 1$.

Övning D

1. Vad menas med att ett polynom $d(X) \in K[X]$ delar ett polynom $f(X) \in K[X]$?

2. Vad menas med största gemensamma delaren till två polynom $f(X)$ och $g(X)$? Beräkna $\mathrm{SGD}(f, g)$ med hjälp av Euklides algoritm då

   (a) $f(x) = X^5 - 14X - 4$, $g(X) = X^3 - 3X - 2$,

   (b) $f(X) = X^4 - 1$, $g(X) = 2X^3 - X^2 + 2X - 1$.

   Anmärkning. På samma sätt som för heltal visar man att $\mathrm{SGD}(f, g) = fp + gq$, där p och q är lämpliga polynom. Polynomen p och q kan beräknas med hjälp av Euklides algoritm.

3. Bevisa att om två polynom f och g är relativt prima dvs $\mathrm{SGD}(f, g) = 1$ och $f|h$ samt $g|h$ så $fg|h$. Kan Du se en likhet med en sats om heltal? Vilken?

4. Bevisa att om ett polynom d delar produkten fg av två polynom och d är relativt primt med f (dvs $\mathrm{SGD}(d, f) = 1$) så d delar g. Vad säger motsvarande sats om heltalen?

Övning E

Lösning av ekvationer. En polynomekvation är en ekvation av typen $f(X) = 0$, där $f(X)$ är ett polynom. Svårigheterna med att lösa sådana ekvationer växer med graden. Helt banalt löser man förstagradsekvationer: $ax + b = 0$, $a \neq 0$ ger $x = -\frac{b}{a}$. För andragradsekvationer $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, har man väl–kända formler

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

som kan härledas med kvadratkomplettering. För ekvationer av grad 3 och 4 existerar mycket mer komplicerade formler som man lyckades härleda under 1500–talet. Man vet att för helt godtyckliga ekvationer av grad ≥ 5 är det inte möjligt att uttrycka rötterna med hjälp av de fyra räknesätten och rotutragningar som tillämpas på ekvationens koefficienter. Detta visades av den store norske matematikern N.H. Abel† och den lika berömde franske matematikern É. Galois‡ Rent praktiskt löser man ofta polynomekvationer med numeriska metoder som ger helt tillfredsställande närmevärden till lösningarna. Ibland utnyttjas enkla satser vars tillämpningsmöjligheter är ganska begränsade när det gäller att lösa ekvationer, men är helt tillräckliga i undervisningssammanhang. Vi har två sådana satser i kursboken:

Om ett rationellt tal $\alpha = \frac{k}{l}$, där $k, l \in \mathbb{Z}$, $SGD(k,l) = 1$, är ett nollställe till polynomet $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ med heltaliga koefficienter a_i, så är k en delare till den lägsta koefficienten a_0, och l är en delare till den högsta koefficienten a_n.

Om z är ett nollställe till ett polynom $f(X)$ med reella koefficienter dvs $f(z) = 0$, så är också $\bar{z}$ ett nollställe till $f(X)$ dvs $f(\bar{z}) = 0$.

1. Lös följande ekvationer:
   (a) $X^3 - 6x^2 + 11X - 6 = 0$,
   (b) $2X^3 - X^2 + 2X - 1 = 0$.
   (c) Övning 7.30 (719) eller 7.31 (720) i Vretblads bok.
2. Lös uppgifterna 7.22 (714) och 7.25 (717) i Vretblads bok.
3. Man vet att polynomet $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2$ har ett nollställe $1 + i$. Bestäm alla andra nollställen till polynomet.

† Nils Henrik Abel (5/8 1802 – 6/4 1829). Abel visade sina resultat om ekvationer av grad ≥ 5 när han var 19 år gammal. Han löste många viktiga matematiska problem inom flera olika områden. I Oslo finns hans monument i den Kungliga Parken.

‡ Évariste Galois (25/10 1811 – 30/5 1832). Under sitt mycket korta liv skapade Galois en mycket viktig teori idag kallad "Galoisteori" som sysslar med polynomekvationer. Han visade hur abstrakta matematiska teorier kan bidra till att lösa komplicerade matematiska problem. På det sättet bidrog han till utvecklingen av den moderna matematiken. Galois lade grunden för gruppteorin och teorin för ändliga kroppar. Dessa teorier har stor betydelse för hela matematiken och dess tillämpningar inom fysik, kemi, kodningsteori och radarkommunikation.

Övning F

1. Låt $N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ beteckna ett naturligt tal med siffrorna a_i (t ex $N = 452 = a_2 a_1 a_0$ med $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 4$). Betrakta polynomet

$$(*) \qquad f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

(a) **Delbarhetskriterium vid division med 3 och 9.** Visa att N är delbart med 3 (respektive 9) då och endast då siffersumman i N är delbar med 3 (respektive 9).

Ledning. Observera att siffersumman i N är lika med $f(1)$ och dividera $f(X)$ med $X - 1$. Sätt in $X = 10$.

(b) **Delbarhetskriterium vid division med 11.** Visa att N är delbart med 11 då och endast då summan $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$ är delbar med 11 (exempel: 1331 är delbart med 11 ty $1 - 3 + 3 - 1 = 0$ är delbar med 11).

Ledning. Gör som i (a), men ersätt $X - 1$ med $X + 1$.

Övning G

Derivatan av ett polynom. Låt $f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in K[X]$. Derivatan av $f(X)$ definieras helt formellt som

$$f'(X) = a_1 + 2a_2 X + \ldots + n a_n X^{n-1}.$$

Man kan kontrollera utan svårigheter vanliga deriveringsregler:

$$(f+g)' = f' + g', \quad \text{och} \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

1. Visa att $a \in K$ är ett multipelt nollställe till $f \in K[X]$ (dvs a har multipliciteten > 1) då och endast då $f(a) = f'(a) = 0$.

Lösning. "$\Rightarrow$" Låt $f(X) = (X-a)^2 q(X)$ (multipliciteten av a är minst 2). Då är $f'(X) = 2(X-a)q(X) + (X-a)^2 q'(X)$ så att $f(a) = f'(a) = 0$.

"$\Leftarrow$" Antag att $f(a) = f'(a) = 0$ och att multipliciteten av a är 1 dvs $f(X) = (X-a)q(X)$ och $q(a) \neq 0$. Då är $f'(X) = q(X) + (X-a)q'(X)$ så att $f'(a) = q(a) \neq 0$ – en motsägelse.

2. Bestäm reella tal a och b så att polynomet $f(X) = aX^{2000} + bX^{1999} + 1$ är delbart med $(X-1)^2$.

3. Lös uppgift 7.58 (733) i Vretblads bok.

Övning H

1. Lös följande kvadratiska ekvationer genom att utnyttja samband mellan rötter och koefficienter (utan formler eller kvadratkomplettering):
   (a) $X^2 - 6X + 8 = 0$,
   (b) $X^2 + 5X + 6 = 0$,
   (c) $X^2 - X - 2 = 0$.

2. Låt x_1, x_2, x_3 beteckna rötterna till ekvationen $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$, $a \neq 0$. Skriv ut sambanden mellan ekvationens rötter och koefficienter. Ange en ekvation av grad 3 med rötterna 1,2,3.

3. Låt x_1, x_2 och x_3 vara rötterna till ekvationen $X^3 - 5X^2 + 6X + 7 = 0$. Beräkna $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ och $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas:

Vretblad: 7.9 (706), 7.10 (707), 7.16 (712), 7.21 (713), 7.23 (715), 7.24 (716), 7.32 (721), 7.33 (722), 7.52 (727), 7.54 (729), 7.59 (734), 7.62 (737).