LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNINGEN I MAL 200 del 3 1998-06-11

Vi ger hänvisningar till kurslitteraturen när det gäller teorifrågor dvs definitioner, satser och deras bevis.

1. **(a) Definiera begreppet en bijektiv funktion och förklara vad man menar med att två mängder A och B har samma kardinalitet (är "lika stora")?**

   (b) Visa att alla jämna heltal har samma kardinalitet som alla heltal delbara med 3.

   (a) Se stencilen "Ändligt och oändligt".

   (b) Låt $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ beteckna jämna heltalen och $B = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$ heltalen delbara med 3. Definiera funktionen $f : A \to B$ så att $f(2k) = 3k$ då $k \in \mathbb{Z}$. Funktionen f avbildar bijektivt A på B ty olika jämna heltal avbildas på olika heltal delbara med 3 och varje heltal delbart med 3 är bilden av ett jämnt heltal ($2k$ avbildas på $3k$).

2. **Ge exempel på**

   (a) en Diofantisk ekvation,

   (b) ett reducibelt och ett irreducibelt polynom med rationella koefficienter,

   (c) en injektiv funktion från $A = \{1, 2, 3\}$ till $B = \{a, b, c\}$.

   (a) Ett exempel på en Diofantisk ekvation är $x^2 + y^2 = z^2$, där x, y och z är heltal. T ex är $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ en lösning till denna ekvation, ty $3^2 + 4^2 = 5^2$.

   (b) Polynomet $x^2 - 1$ är reducibelt i varje polynomring (t ex $\mathbb{Q}[x]$), ty $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Varje polynom av grad 1 är irreducibelt (t ex $x + 1$). $x^2 + 1$ är ett exempel på ett polynom irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ (ty polynomet har grad 2 och saknar rationella nollställen). Detta polynom är också irreducibelt i $\mathbb{R}[x]$, men reducibelt i $\mathbb{C}[x]$, ty $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.

   (c) Definiera $f(1) = a$, $f(2) = b$ och $f(3) = c$. Då får man en injektiv funktion från den första mängden till den andra.

3. **(a) Låt a och b vara två nollskilda heltal. Definiera begreppet största gemensamma delaren till a och b och beräkna SGD$(143, 227)$.**

   (b) Låt f och g vara två polynom skilda från nollpolynomet. Definiera begreppet största gemensamma delaren till f och g.

   (c) Förklara likheten mellan begreppen i (a) och (b).

   (a) Definitionen av SGD(a, b) hittar man i stencilen "Delbarhet och primtal" eller nedan i (c). SGD$(143, 227) = 1$, ty 227 är ett primtal. Men man kan också beräkna SGD med hjälp av Euklides algoritm:

$$
\begin{aligned}
227 &= 143 \cdot 1 + 84, \\
143 &= 84 \cdot 1 + 59, \\
84 &= 59 \cdot 1 + 25 \\
59 &= 25 \cdot 2 + 9, \\
25 &= 9 \cdot 2 + 7 \\
9 &= 7 \cdot 1 + 2, \\
7 &= 2 \cdot 3 + 1, \\
3 &= 1 \cdot 3.
\end{aligned}
$$

   Den sista nollskilda resten 1 är största gemensamma delaren.

   (b) Se Vretblads bok för definition eller (c) nedan.

(c) Bägge begreppen definieras på samma sätt: Om a, b betecknar två heltal eller två polynom med koefficienter i samma ring och $\mathrm{SGD}(a, b) = d$ så är

(1) $d|a$ och $d|b$

samt

(2) om $d'|a$ och $d'|b$ så är $d'|d$.

4. **Visa att för varje naturligt tal $n \geq 2$ är talet 12 en delare till $10^n - 4$.**

Vi visar satsen med matematisk induktion. Om $n = 2$ så gäller påståendet ty $10^2 - 4 = 96$ är delbart med 12.

Antag att påståendet gäller för $n = k$, där $k \geq 2$ dvs $12|10^k - 4$. Vi visar att påståendet gäller för $n = k + 1$ dvs $12|10^{k+1} - 4$. Vi har

$$10^{k+1} - 4 = 10 \cdot 10^k - 4 = 10^k - 4 + 9 \cdot 10^k = 10^k - 4 + 900 \cdot 10^{k-2}.$$

Dessa omskrivningar visar att talet $10^{k+1} - 4$ är delbart med 12 därför att $10^k - 4$ är delbart med 12 enligt induktionsantagandet och $900 \cdot 10^{k-2}$ är delbart med 12 därför att 12 delar 900.

Enligt induktionsprincipen är $10^n - 4$ delbart med 12 för alla $n \geq 2$.

5. **Bestäm alla komplexa tal z sådana att $4z^2 + 8|z|^2 = 3$.**

Låt $z = a + bi$. Då är $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ och $|z|^2 = a^2 + b^2$. Alltså är

$$4z^2 + 8|z|^2 = 12a^2 + 4b^2 + 8abi = 3.$$

Denna ekvation ger $12a^2 + 4b^2 = 3$ och $8ab = 0$, ty realdelen till vänster är lika med realdelen till höger och imaginärdelen till vänster är lika med imaginärdelen till höger. Den andra ekvationen ger två fall: $a = 0$ eller $b = 0$.

Om $a = 0$ så är $12a^2 = 3$ dvs $a^2 = \frac{1}{4}$. Detta ger $a = \pm\frac{1}{2}$.

Om $b = 0$ så är $4b^2 = 3$ dvs $b^2 = \frac{3}{4}$. Detta ger $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Svar: $z_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ eller $z_{3,4} = \pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

6. **(a) Beräkna resten vid division av $X^{100} + X^{99} + \cdots + X + 1$ med $X - 1$.**
   (b) Formulera och bevisa faktorsatsen.

(a) Resten vid division av ett polynom $f(X)$ med $X - a$ är lika med $f(a)$. Alltså är resten av det givna polynomet $f(X) = X^{100} + X^{99} + \cdots + X + 1$ vid division med $X - 1$ lika med $f(1) = 1^{100} + 1^{99} + \cdots + 1 + 1 = 101$.

(b) Se Vretblads bok, kapitel 7.

Om Du inte har godkänt inlämningsuppgifterna löser Du efterföljande problem 7 – 9:

7. **Vilka av följande utsagor är ekvivalenta $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow \neg B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$. Motivera noga!**

Utsagan $A \Rightarrow B$ är ekvivalent med $\neg B \Rightarrow \neg A$. För att bevisa detta kan man betrakta en sanningstabell.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
F	F	S	S	S
F	S	S	S	S
S	F	F	F	S
S	S	S	S	S

Tabellen visar att $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ är en tautologi.

Implikationen $A \Rightarrow \neg B$ är inte ekvivalent med de övriga två. Om man väljer sanna utsagor A och B så är $A \Rightarrow B$ sann, medan $A \Rightarrow \neg B$ är falsk. Den tredje implikationen är naturligtvis också sann (den är ekvivalent med den första).

8. **85% av dem som ämnar fortsätta läsa matematik väljer Algebraiska strukturer, 90% väljer Specialkursen i matematik och 75% väljer Logik och geometri. Visa att minst 50% av eleverna väljer alla tre kurser.**

   Låt A, B, C beteckna mängderna av dem som har valt Algebraiska strukturer, Specialkursen i matematik och Logik och geometri. Låt $U = A \cup B \cup C$. Enligt förutsättningen är

$$\#(A) = \frac{85}{100}\#(U), \quad \#(B) = \frac{90}{100}\#(U), \quad \#(C) = \frac{75}{100}\#(U),$$

   där $\#(X)$ betecknar antalet element i mängden X. Alltså är

$$\#(A \cap B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cup B) \geq \frac{85}{100}\#(U) + \frac{90}{100}\#(U) - \#(U) = \frac{75}{100}\#(U),$$

   dvs minst 75% väljer de första två kurserna.

$$\#(A \cap B \cap C) = \#(A \cap B) + \#(C) - \#((A \cap B) \cup C) \geq \frac{75}{100}\#(U) + \frac{75}{100}\#(U) - \#(U) = \frac{50}{100}\#(U),$$

   dvs minst 50% väljer alla tre kurser. (Uppgiften kan lösas på andra sätt.)

9. **Låt x och y vara reella tal. Skriv ut negationen av följande utsaga så att negationssymbolen inte förekommer i svaret**

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} \, [x > 0 \Rightarrow xy > 0].$$

   Är den givna utsagan falsk eller sann?

   Negationen lyder

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \, [x > 0 \wedge xy \leq 0].$$

   Den ursprungliga utsagan är sann. Tag $x = -1$. Då säger den att för varje $y \in \mathbb{R}$ gäller

$$-1 > 0 \Rightarrow -y > 0.$$

   Denna implikation är verkligen sann (oberoende av y) därför att utsagan $-1 > 0$ är falsk.