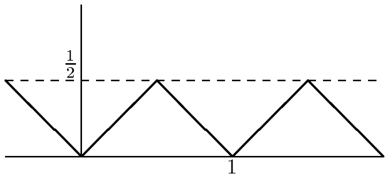
MATEMATIK | MAL400
Göteborgs universitet | H98

En ingenstans deriverbar funktion

Definiera för $k \geq 0$:

$$f_k(x) = \min_{m \in \mathbb{Z}} |x - m \cdot 4^{-k}| \ .$$

Funktionen f_k är periodiskt med period 4^{-k}. T ex $f_0(x) = \min_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$ ger avståndet från x till närmaste heltal. Dess graf ser ut som:



1. Rita grafen till f_0 och f_1 i samma figur.

Definiera :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad \text{och} \quad F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \ .$$

2. Rita grafen till $F_1 = f_0 + f_1$ och $F_2 = f_0 + f_1 + f_2$.

3. Visa att $0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{2} \cdot 4^{-k}$ för alla k. Visa att $|F(x) - F_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot 4^{-n}$. Konkludera att gränsvärdet i definitionen existerar.

4. Visa att F är kontinuerlig.
Ledning: triangelolikheten ger att för alla n:

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - F_n(y)| + |F(y) - F_n(y)|$$

Använd detta för ett lämpligt n, t ex sådant att $|F(x) - F_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Målet är nu att visa att för alla $x \in \mathbb{R}$ funktionen $F(x)$ inte är deriverbar. Därför väljer vi, givet x, för varje n en punkt $x + h_n$ på formen $x + \frac{1}{4} \cdot 4^{-n}$ eller $x - \frac{1}{4} \cdot 4^{-n}$ sådant att funktionen f_n är linjär mellan x och $x + h_n$ (och därmed f_k för alla $k \leq n$).

5. Visa att för $k \leq n$:

$$\frac{f_k(x + h_n) - f_k(x)}{h_n} = \pm 1$$

medan för $k > n$

$$\frac{f_k(x + h_n) - f_k(x)}{h_n} = 0 \ .$$

6. Visa att $\frac{F(x+h_n) - Fk(x)}{h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x+h_n) - f_k(x)}{h_n}$ är ett jämnt heltal om n är udda och ett udda heltal om n är jämt. Konkludera att $F'(x)$ inte existerar.