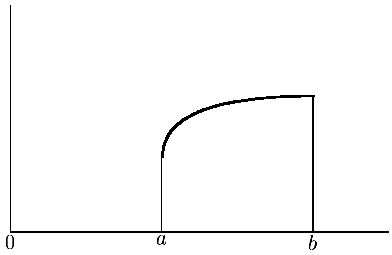
MATEMATIK
Göteborgs universitet

MAL400
H98

Integraler.

Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad positiv funktion. Vi "definierar" integralen $\int_a^b f(x)dx$ som arean under grafen:



Vi har en intuitiv idé vad arean är, men för att precisera den behöver man integraler. Vi ska använda den axiomatiska metoden: vi ger rimliga egenskaper, som räcker för att beräkna integraler. Ett existensbevis behövs, men detta kommer senare. Den viktigaste klassen av integrerbara funktionen är de kontinuerliga funktioner. I tillämpningar räcker det inte alltid.

Definition. En funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kallas *regelfunktion* om f har en högergränsvärde i varje punkt $x \in [a,b[$ och en vänstergränsvärde i varje punkt $x \in]a,b]$.

Exempel.
1) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinuerlig.
2) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ styckvis kontinuerlig: det finns tal $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ och kontinuerliga funktioner $f_i\colon [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ sådana att $f(x) = f_i(x)$ för $x_{i-1} < x < x_i$.
3) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton.
4) funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ och $f(x) = 1/x$ för $x > 0$, är inte en regelfunktion, ty högergränsvärdet i $x = 0$ inte existerar.

En regelfunktion är begränsad. Detta följer ur en sats om approximation med styckvis konstanta funktioner, som vi visar senare. Om f är inte uppåt begränsad, så kan vi hitta en följd punkter x_n med $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Vi måste jobba lite hårdare för att visa att vi kan välja följden konvergent. Argumentet baserar på intervallhalvering och ges i beviset till approximationssatsen. Men om $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$, då kan $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ bara vara lika med höger- eller vänstergränsvärdet in x_*, som är ändliga.

Definition. En *integral* är en regel som mot varje regelfunktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ordnar ett tal $\int_a^b f(x)\,dx$ sådant att

I 1: $\int_a^b 1\,dx = b-a$

I 2: $\int_a^b Af(x)+Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$

I 3: $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ om $f(x) \le g(x)$ for $x \in [a,b]$

I 4: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

I 5: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Observera att x är en intern variabel och kan ersättas med en annan symbol: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.
Egenskap I 4 gäller för alla positioner av a, b och c om vi definierar $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Sats. *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en regelfunktion, Funktionen $S\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ ,$$

är kontinuerlig. Om f själva är kontinuerlig då är S deriverbar och $S'(x) = f(x)$ för $a < x < b$.

Bevis. Eftersom f är begränsad finns det ett M s.a. $|f(x)| \le M$ för alla $x \in [a,b]$. Då är

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}|S(x+h)-S(x)| &= \lim_{h\to 0}\left|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \\ &= \lim_{h\to 0}\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \le \lim_{h\to 0} M|h| = 0\ .\end{aligned}$$

Låt nu $x \in]a,b[$ och $\varepsilon > 0$. Om $f(x)$ är kontinuerlig finns det ett δ sådant att $|f(x+h)-f(x)| < \varepsilon$ för alla $0 < |h| < \delta$. Då gäller för sådana h att

$$\begin{aligned}\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt \le \frac{h\varepsilon}{h} = \varepsilon\ .\end{aligned}$$

Detta visar att $S'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(x)$. □

Definition. Låt $f(x)$ och $F(x)$ vara funktioner. Om $F(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ och $F'(x) = f(x)$ för alla $a < x < b$, så kallas $F(x)$ en *primitiv funktion* till $f(x)$ i intervallet $[a,b]$.

Integralkalkylens huvudsats. *Om $f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ och om F är en primitiv funktion till $f(x)$ i $[a,b]$ så är*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)\ .$$

Bevis. Formeln gäller för $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ty $S(a) = 0$, $S(b) = \int_a^b f(t)\,dt$. Eftersom $(S-F)'(x) = f(x) - f(x) = 0$ är $S(x) - F(x)$ konstant, dvs $S(x) = F(x)+C$ g för något C. För $x = a$: $S(a) = 0 = F(a)+C$. Därför är $\int_a^b f(x)\,dx = S(b) = F(b) - F(a)$. □

Exempel. Beräkna $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.
Svar: vi observerar att $\frac{d}{dx}\ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$. Alltså är $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

Om uppgiften är: beräkna $\int f(x)\,dx$, så är svaret mängden av alla primitiva funktioner, som betecknas med $F(x) + C$. Integralen $\int f(x)\,dx$ kallas för *obestämd integral*, medan $\int_a^b f(x)\,dx$ är en *bestämd integral*.

Exempel. Beräkna $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$.
Svar: $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

Partialintegration. *Om f och g är deriverbara funktioner och funktionerna f' och g' är kontinuerliga, så gäller*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = fg - \int f(x)g'(x)\,dx$$

och speciellt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ .$$

Bevis. Produktregeln: $(fg)' = f'g + fg'$. □

Variabelsubstitution. *Låt F vara en primitiv funktion till den kontinuerliga funktionen f. Låt $y = g(x)$ vara deriverbar och g' kontinuerlig. Då är $F(g(x))$ en primitiv funktion till $f(g(x))\cdot g'(x)$ och*

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{y=g(a)}^{y=g(b)} f(y)\,dy\ .$$

Bevis. Första påståendet följer ur kedjeregeln. Huvudsatsen ger att båda sidor av ekvationen har samma värde $F(g(b)) - F(g(a))$. □

Supremum och infimum.

Om $I =]a,b[$ är ett öppet intervall, då har I inte ett storsta eller minsta element. Vi kan alltså inte kalla b för maximum. Vi introducerar därför en ny term, supremum.

Definition. Låt $A \subset \mathbb{R}$ vara en delmängd. *Avslutningen* $\overline{A}$ av A är

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \lim_{n\to\infty} a_n, \text{ där } a_n \in A\} .$$

Definition. Låt $A \subset \mathbb{R}$ vara uppåt begränsad. *Supremum* till A är storsta elementet i avslutningen $\overline{A}$ och betecknas med $\sup A$. Om A är nedåt begränsad, så kallas minsta elementet i $\overline{A}$ för *infimum*, $\inf A$.

Implicit i definitionen är den viktiga satsen att supremet existerar. Detta beror på $\mathbb{R}$'s fullständighet. För $\mathbb{Q}$ gäller satsen inte: $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \text{ och } x^2 < 2\} = [0,\sqrt{2}[\cap\mathbb{Q} = [0,\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, så det finns någonting att visa för $\mathbb{R}$. Man kan t ex visa infimums existens genom att konstruera en växande följd av rationella tal, nämligen ändliga decimalbråk: låt b_n vara det storsta n-siffriga decimalbråk s a $b_n \leq a$ för alla $a \in A$. Då blir $\lim_{n\to\infty} b_n$ decimalbråksutvecklingen till $\inf A$.

Riemannintegralen.

Idéen för att definiera integralen är att approximera integranden med styckvis konstanta funktioner. Området under grafen består då av rektanglar, och en rektangel med höjd h och bas b har arean hb.

Definition. En trappfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är en styckvis konstant funktion, dvs det finns en indelning $D\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ och tal c_i sådana att $\varphi(x) = c_i$ för $x_{i-1} < x < x_i$. Funktionsvärdena $\varphi(x_i)$ är godtyckliga.

Summan av två trappfunktioner är igen en trappfunktion.

Definition. Låt $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en trappfunktion med avseende på en indelning D. Vi definierar

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) .$$

Integralen beror inte på indelningen. Låt $D'\colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ vara en annan indelning med $\varphi(t) = c_i'$ på $]t_{i-1}, t_i[$. Som förkortning skriver vi $\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_D \varphi$. Vi vill visa att $\int_{D'} \varphi = \int_D \varphi$. Antag först att D' är en förfining av D, dvs varje delningspunkt x_i förekommer under de t_j. Detta betyder att vi har för varje i en indelning $x_{i-1} = t_{k_{i-1}} < t_{k_{i-1}+1} < \ldots < t_{k_i} = x_i$ med $\varphi(t) = c_i$ för alla $t \in]t_{k_{i-1}+j-1}, t_{k_{i-1}+j}[$. Då är

$$\int_{D'} \varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} c_i(t_j - t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_D \varphi \ .$$

Om nu D' är en godtycklig indelning, så har d och d' en gemensam förfining D^* med $\{x_0, \ldots, x_n, t_0, \ldots, t_m\}$ som mängd av delningspunkter. Då gäller enligt ovan att $\int_{D'} \varphi = \int_{D^*} \varphi = \int_D \varphi$.

Lemma. *Den så definierade integralen för trappfunktioner uppfyller egenskaper* I 1 *till* I 5.

Låt nu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Given en indelning $D\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ vi kan konstruera en trappfunktion φ dess graf ligger under grafen till f genom att definiera $c_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$; en trappfunktion över grafen fås med $C_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Integraler för dessa trappfunktioner kallas undersumma respektive översumma.

Definition. Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Vi definierar överintegralen och underintegralen till f som

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \text{ trappfunktion med } \varphi(x) \geq f(x) \text{ för } a \leq x \leq b\right\},$$
$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx \mid \varphi \text{ trappfunktion med } \varphi(x) \leq f(x) \text{ för } a \leq x \leq b\right\}.$$

Definition. En begränsad funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kallas Riemann-integrerbar (eller bara *integrerbar*) om $\int_a^{b*} f(x)\,dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx$ och vi sätter då

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b*} f(x)\,dx \ .$$

Exempel. Vi definierar $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \text{ är rationellt,} \\ 0, & \text{om } x \text{ är irrrationellt.} \end{cases}$$

Eftersom varje intervall innehåller rationella och irrationella tal är $\int_0^{1*} f(x)\,dx = 1$ medan $\int_{0\,*}^{1} f(x)\,dx = 0$, alltså är f inte Riemannintegrerbar.

Sats. *En funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är integrerbar om och endast om det finns för varje $\varepsilon > 0$ trappfunktioner φ, ψ med $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ för alla $x \in [a,b]$ och*

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \varepsilon \ .$$

Satsen följer direkt ur definitionen av supremum och infimum.

Sats. *Varje regelfunktion är Riemannintegrerbar.*

Bevis. Vi först visar följande approximationssats:

För varje $\varepsilon > 0$ finns det en trappfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ så att $0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$ för alla $x \in [a,b]$.

Vi kallar en sådan trappfunktion φ för ε-approximation (nerifrån). Antag att för en viss $\varepsilon > 0$ en ε-approximation inte existerar. Vi konstruerar nu en följd intervall $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots$ med $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$ och egenskapen att för varje n en ε-approximation till f existerar inte på intervallet $[a_n, b_n]$. Vi sätter $[a_0, b_0] = [a, b]$ och konstruerar de följande intervall sukcessivt genom halvering: om $[a_n, b_n]$ är redan definierad och $M = (a_n + b_n)/2$ är dess midpunkt, så existerar en ε-approximation till f inte på minst en av de två intervallen $[a_n, M]$, $[M, b_n]$ och som $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ väljer vi en sådan hälft. Betrakta nu punkten ξ och låt c_h, c_v vara höger- och vänstergränsvärden i ξ. Det finns ett tal $\delta > 0$ så att $|f(x) - c_v| \leq \varepsilon/2$ för $\xi - \delta \leq x < \xi$ och $|f(x) - c_h| \leq \varepsilon/2$ för $\xi < x \leq \xi + \delta$. Om N är tillräckligt stort så är $[a_N, b_N] \subset [\xi - \delta, \xi + \delta]$ och trappfunktionen definierad som

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_v - \varepsilon/2, & x \in [a_N, \xi[\\ f(\xi), & x = \xi \\ c_h - \varepsilon/2, & x \in]\xi, b_N] \end{cases}$$

är en ε-approximation, i motsägelse mot konstruktionen av $[a_n, b_N]$. Detta visar approximationssatsen.

Motsvarande sats för approximation uppifrån visas på samma sätt eller genom att approximera funktionen $-f$ nerifrån.

Låt nu $\varepsilon > 0$. Till $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ finns trappfunktioner φ och ψ med $0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ och $0 \leq \psi(x) - f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Då är

$$\int_a^b \psi(x) - \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)}\,dx = \varepsilon$$

och därmed är f integrerbar. □

Klassen av Riemannintegrerbara funktioner är större än klassen av alla regelfunktioner. Som exempel betraktar vi $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ om $x \in]0,1]$ och $f(0) = 0$. Högergränsvärdet i 0 existerar inte. Men $(x^2 \cos(1/x))' = 2x\cos(1/x) + \sin(1/x)$, och $2x\cos(1/x)$ är kontinuerlig, så $x^2\cos(1/x) - \int_0^x 2t\cos(1/t)\,dt$ är en primitiv funktion; härav följer att $f(x) = \sin(1/x)$ är Riemannintegrerbar.

Slutligen visar vi att egenskaper I 1 till I 5 är uppfyllda.

Sats. *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ och $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara Riemannintegrerbara funktioner. Då gäller:*

I 1: $\int_a^b 1\,dx = b-a$.
I 2: *funktionen* $Af + Bg$ *är också integrerbar och*

$$\int_a^b Af(x) + Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx\ .$$

I 3: $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ *om* $f(x) \le g(x)$ *for* $x \in [a,b]$.
I 4: *låt* $a < b < c$. *Funktionen* f *är integrerbar över* $[a,c]$ *om och endast om* f *är integrerbar over* $[a,b]$ *och över* $[b,c]$ *och då är* $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.
I 5: *funktionen* $|f|$ *är också integrerbar och* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Bevis. I 1 till I 4 följer lätt ur korresponderande egenskaper för trappfunktioner. För att visa I 5 definierar vi först för en godtycklig funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funktioner f_+ och f_- genom

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{om } f(x) \ge 0 \\ 0, & \text{om } f(x) < 0 \end{cases}$$

och

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{om } f(x) \le 0 \\ 0, & \text{om } f(x) > 0 \end{cases}$$

Vi har $f = f_+ - f_-$ och $|f| = f_+ + f_-$. Låt nu f vara integrerbar. Då finns det för varje $\varepsilon > 0$ trappfunktioner med $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ och $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx \le \varepsilon$. Då är också φ_+ och ψ_+ trappfunktioner med $\varphi_+(x) \le f_+(x) \le \psi_+(x)$ och $\int_a^b (\psi_+ - \varphi_+)(x)\,dx \le \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx \le \varepsilon$. Så f_+ är integrerbar och integrerbarhet av f_- följer på samma sätt. Därför är också $|f| = f_+ + f_-$ integrerbar. $\square$

Tillämpning.

Sats. *Talet* π^2 *och därmed också* π *är irrationellt.*

Bevis. Betrakta integralen

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x\,dx\ .$$

Vi härledar en rekursionsformeln för I_n genom att integrera partiellt två gånger:

$$\begin{aligned} I_n &= (\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^n \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2xn(\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^{n-1} \sin x\,dx \\ &= -2xn(\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^{n-1} \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2n(\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^{n-1} - 4n(n-1)x^2(\tfrac{\pi^2}{4} - x^2)^{n-2}] \cos x\,dx \\ &= 2n(2n-1)I_{n-1} - n(n-1)\pi^2 I_{n-2}\ . \end{aligned}$$

Vi har

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

och I_1 beräknas liksom ovan genom att två gånger integrera partiellt:

$$I_1 = -2x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2 \; .$$

Varje I_n kan nu beräknas, men för oss räcker det att I_n har formen $I_n = n!P(\pi^2)$ där $P(\pi^2)$ är en polynom i π^2 med heltalkoefficienter av grad högst n, ett påstående som vi inte heller visar.

Antag nu att $\pi^2 = \frac{a}{b}$. Vi sätter $J_n := I_n b^n/n!$. Vi visar nu att J_n är ett heltal. Genom att multiplicera rekursionsformeln för I_n med $b^n/n!$ får vi

$$J_n = 2(2n-1)bJ_{n-1} - abJ_{n-2} \; .$$

Vidare är $J_0 = I_0 = 1$ och $J_1 = bI_1 = 2b$. Induktivt följer nu att J_n är ett heltal.

Å andra sidan kan vi uppskatta integralen. Ty integranden är positiv på $]0, \frac{\pi}{2}[$, är $I_n > 0$. Också gäller

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \, dx < (\frac{\pi^2}{4})^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = (\frac{\pi^2}{4})^n$$

och därför, om $\pi^2 = \frac{a}{b}$,

$$0 < J_n < \frac{a^n}{4^n n!} < 1, \quad \text{om } n \text{ stor}$$

vad som motsäger att J_n är ett heltal. Därför är π^2 irrationellt. $\square$