Standardgränsvärden

1) $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty \qquad$ om $\alpha > 0$

2) $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \qquad$ om $a > 1$, $\qquad \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \qquad$ om $0 < a < 1$

3) $\lim_{x\to\infty} {}^a\!\log x = \infty \qquad$ om $a > 1$, $\qquad \lim_{x\to\infty} {}^a\!\log x = -\infty \qquad$ om $0 < a < 1$

4) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = \infty \qquad$ om $a > 1$

5) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{{}^a\!\log x} = \infty \qquad$ om $\alpha > 0$ och $a > 1$

6) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

7) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Bevis till 4): Vi visar att $a^x > x^{\alpha+1}$ for stora x. Då gäller $a^x/x^\alpha > x$.
Skriv $a = (1+b)$ och låt $n = \lfloor x \rfloor$, dvs n uppfyller $n \le x < n+1$. Då är

$$a^x \ge a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \ldots + b^n \ge \binom{n}{s} b^s$$

för varje $0 \le s \le n$. Vi väljer nu s som heltal större än $\alpha + 2$. För $x > 2s$ gäller $n - s + 1 > x/2$ och därför

$$\binom{n}{s} b^s = \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!} b^s > \frac{x^s b^s}{2^s s!} > x^{\alpha+2} \left(\frac{b^s}{2^s s!}\right) .$$

Om $x > 2^s s!/b^s$ är sista uttrycket större än $x^{\alpha+1}$, VSV.