MATEMATIK
Göteborgs universitet

MAL400
H99

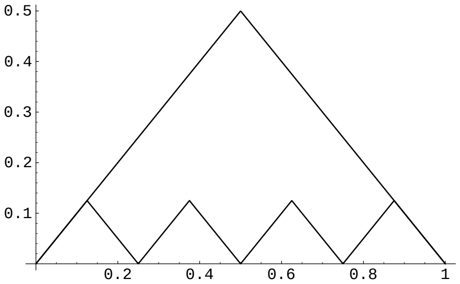
Lösningar till inlämningsuppgifter

Vi har

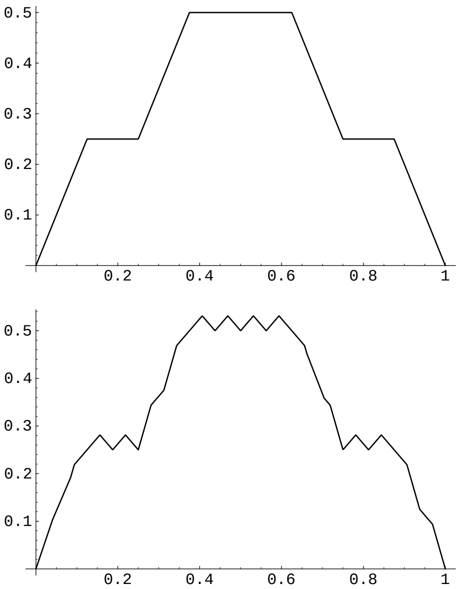
$$f_k(x) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{m}{4^k} \right| \ ,$$

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad \text{och} \quad F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \ .$$

1. Grafen till f_0 och f_1:



2. Graferna till F_1 och F_2:



3. Givet x, bestäm m s.a. $\frac{m}{4^k} \leq x < \frac{m+1}{4^k}$. Då är $f_k(x) = \min\{x - \frac{m}{4^k}, \frac{m+1}{4^k} - x\}$, som är högst $\frac{1}{2}\left((x - \frac{m}{4^k}) + (\frac{m+1}{4^k} - x)\right) = \frac{1}{2 \cdot 4^k}$. Därför är $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{4^k}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-1/4}) = \frac{2}{3}$.

4. Låt $\varepsilon > 0$. Då finns ett n s.a. $|F(x) - F_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ för alla $x \in \mathbb{R}$, ty $|F(x) - F_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{4^k})$, som går mot 0 då $n \to \infty$. Funktionen $F_n(x)$ är kontinuerlig i $x = a$, så det finns ett δ med $|F_n(x) - F_n(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ för $|x - a| < \delta$. För sådana x är nu enligt triangelolikheten $|F(x) - F(a)| \leq |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - F_n(a)| + |F(a) - F_n(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$. Definitionen av kontinuitet är alltså uppfyld.

Vi väljer, givet a, för varje n en punkt $a + h_n$ på formen $a + \frac{1}{4 \cdot 4^n}$ eller $x - \frac{1}{4 \cdot 4^n}$ sådant att funktionen f_n är linjär mellan a och $a + h_n$ (och därmed f_k för alla $k \leq n$).

5. Funktionen f_k är linjär mellan a och $a+h_n$ för alla $k \leq n$ med riktningskoefficient 1 eller -1. Därför är $\frac{f_k(a+h_n)-f_k(a)}{h_n} = \pm 1$, medan $f_k(a \pm \frac{1}{4 \cdot 4^n}) = 0$ för $k > n$, ty funktionen f_k är periodiskt med period $\frac{1}{\cdot 4^k}$.

6. Vi har med resultatet av uppgift 5 att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(a+h_n)-f_k(a)}{h_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(a+h_n)-f_k(a)}{h_n}$. Påståendet att summan är ett jämnt heltal om n är udda och ett udda heltal om n är jämt, kan visas med induktion. För $n = 0$ har vi $\frac{f_0(a+h_n)-f_0(a)}{h_n} = \pm 1$, som är udda. Addition eller subtraktion av 1 till ett udda tal ger ett jämnt tal, till ett jämt tal ett udda tal. Gränsvärdet $\lim_{n \to \infty} \frac{F(a+h_n)-F_k(a)}{h_n}$ existerar inte: ett tal kan inte vara samtidigt udda och jämnt. Därför existerar $F'(a)$ inte.