MATEMATIK MAL400
Göteborgs universitet H99

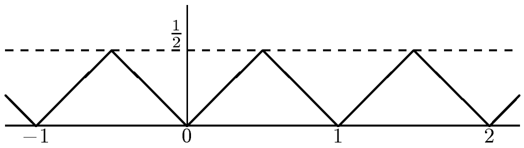
Inlämningsuppgifter

Standardexemplet för en funktion som är kontinuerlig utan att vara deriverbar är funktionen $f(x) = |x|$ som är deriverbar för alla x utom $x = 0$. Men det finns även kontinuerliga funktionen där derivatan inte existerar i någon punkt. Syftet med uppgifterna är att studera en sådan funktion.

Vi definierar kontinuerliga funktioner $f_k(x)$ för alla $k \geq 0$:

$$f_k(x) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{m}{4^k} \right| \; .$$

Funktionen f_k är periodiskt med period $\frac{1}{4^k}$. T ex $f_0(x) = \min_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$ ger avståndet från x till närmaste heltal. Dess graf ser ut som:



1. *Rita grafen till f_0 och f_1 i samma figur.*

Definiera :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad \text{och} \quad F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \; .$$

2. *Rita grafen till $F_1 = f_0 + f_1$ och $F_2 = f_0 + f_1 + f_2$.*

3. *Visa att $0 \leq f_k(x) \leq \dfrac{1}{2 \cdot 4^k}$ för alla k. Visa att $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \leq \frac{2}{3}$.*
Härav följer att gränsvärdet i $F(x)$:s definition existerar.

4. *Visa att F är kontinuerlig i alla punkter $x = a$.*
Ledning: triangelolikheten ger att för alla n

$$|F(x) - F(a)| \leq |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - F_n(a)| + |F(a) - F_n(a)|$$

Använd detta för ett lämpligt n, t ex sådant att $|F(x) - F_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Målet är nu att visa att för alla $a \in \mathbb{R}$ funktionen $F(x)$ inte är deriverbar i punkten $x = a$. Därför väljer vi, givet a, för varje n en punkt $a + h_n$ på formen $a + \frac{1}{4\cdot 4^n}$ eller $x - \frac{1}{4\cdot 4^n}$ sådant att funktionen f_n är linjär mellan a och $a + h_n$ (och därmed f_k för alla $k \leq n$); från grafen i uppgift 1 ser man lätt att sådana punkter existerar.

5. *Visa att för $k \leq n$*

$$\frac{f_k(a+h_n) - f_k(a)}{h_n} = \pm 1$$

medan för $k > n$

$$\frac{f_k(a+h_n) - f_k(a)}{h_n} = 0\ .$$

6. *Visa att $\frac{F(a+h_n)-F_k(a)}{h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(a+h_n)-f_k(a)}{h_n}$ är ett jämnt heltal om n är udda och ett udda heltal om n är jämt. Konkludera att $F'(a)$ inte existerar.*

Varje uppgift ger 1 poäng. Lösningarna ska lämnas till mig senast tisdagen den 5 oktober.

Lycka till! Jan Stevens