Kap. 1,2. Funktioner

Några beteckningar:
Slutet intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
Öppet intervall: (a, b) eller $]a, b[$: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
Halvöppna intervall:
$(a, b]$ eller $]a, b]$: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
$[a, b)$ eller $[a, b[$: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Om $f\colon X \to Y$ är en funktion kallar vi X för f:s *definitionsmängd* (eller *definitionsområde*) och Y för *målmängden*. *Värdemängden* (eller *värdeförrådet*) $V_f := f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$ är en delmängd till målmängden.
Funktionen f är *injektiv* omm olika värden på variabeln ger olika bilder:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

eller $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$. Funktionen är *surjektiv* om och endast om $f(X) = Y$, d v s varje element $y \in Y$ är bild till något $x \in X$. Om f är båda injektiv och surjektiv kallas f för *bijektiv*.
Inversen till en funktion $f\colon X \to Y$ är en funktion $g\colon Y \to X$ så att $f(g(y)) = y$ för all $y \in Y$ och $g(f(x)) = x$ för all $x \in X$. Om en invers existerar är f bijektiv och inversen är entydig. Den betecknas med f^{-1}.
Då man i analysen anger reella funktioner utelämnar man oftast målmängden $\mathbb{R}$ och även definitionsmängden; man skriver t ex $f(x) = 1/x$. Definitionsmängden antags då vara den storsta mängd för vilken uttrycket har mening (i exemplet: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Om nu f är en injektiv funktion med definitionsområde $D_f \subset \mathbb{R}$, så är $f\colon D_f \to V_f \subset \mathbb{R}$ bijektiv med invers $f^{-1}\colon V_f \to D_f$. Man säger att funktionen f^{-1} är inversen till f.

Additionsformler för sinus och cosinus:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

Speciellt gäller $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ och $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$. Genom division får man

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} .$$

Övningar till Kap. 1,2.

1. Lös olikheterna
a) $\frac{x}{x^2-x-2} > \frac{2}{x+1}$ b) $\frac{x+1}{x} + \frac{3x}{x-1} \geq 0$ c) $\frac{x^2-3}{x+1} > -x$

2. Lös följande ekvationer
a) $x+3 = \sqrt{3x+16}$ b) $\sqrt{10-3x} = x-2$ c) $\sqrt{x^3-12x+25} = x+1$

3. Lös ekvationerna
a) $|x-3| = 7$ b) $|1-t| = 1$ c) $|2t+5| = 4$ d) $|8-3s| = 9$

4. Ange intervallen givna av följande olikheter
a) $|x| \leq 2$ b) $|s-1| \leq 2$ c) $|t+2| < 1$ d) $|3x-7| < 2$
e) $|2x+5| < 1$

5. Lös olikheterna
a) $|x+1| > |x-3|$ b) $|x-3| < 2|x|$ c) $|x^2-6| < 7$ d) $|x^2-7| < 6$

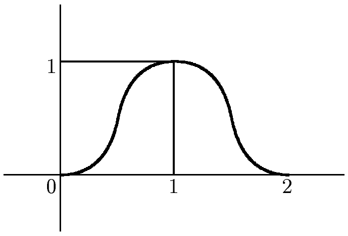
6. För vilka reella tal a gäller att $|-a| = a$?

7. Beräkna $\frac{x}{|x|}$ för
a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = \pi - \sqrt{2}$ d) $x = y + |y| - 1$ för alla $y \neq \frac{1}{2}$.

8. Lös ekvationen $|x-1| = 1-x$.

9. a) När är $|x+y| = x+y$?
b) När är $|x+y| = |x| + |y|$?

10. Grafen nedan visar funktionen f med definitionsområde $[0,2]$ och värdeförråd $[0,1]$.



Rita grafen och ange definitionsområdet och värdeförrådet till funktionerna
a) $f(x)+2$ b) $f(x+2)$ c) $f(4-x)$ d) $2-f(1-x)$

11. Rita grafen till följande funktioner
a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{1-x}{1+x}$ c) $y = \ln(-x)$ d) $y = 3x^2+1$ e) $y = e^{-x}+1$

12. a) Är enhetscirkeln $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ grafen till en funktion $[-1,1] \to \mathbb{R}$?
b) Är $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ grafen till en funktion $[-1,1] \to \mathbb{R}$?

13. Låt $f(x) = x + 5$ and $g(x) = x^2 - 3$. Bestäm

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

14. Bestäm inversen till funktionerna

a) $2x - 1$ b) $x^3 + 1$ c) $\sqrt{x-1}$ d) $x^2,\ x \leq 0$

e) $\frac{1}{x+1}$ f) $\frac{x}{x+1}$

15. Förenkla följande uttryck

a) $e^3/\sqrt{e^5}$ b) $e^{3\ln x}$ c) $3\ln 4 - 4\ln 3$ d) $\ln(x^2 + 6x + 9)$

16. Lös ekvationerna

a) $\ln x = -1,5$ b) $\ln x = \ln 2 + \ln 3$ c) $\ln x = -\ln 5$

d) ${}^{10}\log x = -1 + {}^{10}\log 5$

17. Lös följande ekvationer

a) $2^{x+1} = 3^x$ b) $3^x = 9^{1-x}$ c) $\frac{1}{2^x} = \frac{5}{8^{x+3}}$ d) $2^{x^2-3} = 4^x$

18. Lös ekvationen $\ln(1+x) + \ln(1-x) = 2\ln x$.

19. Beräkna

a) $\cos\frac{3\pi}{4}$ b) $\tan -\frac{3\pi}{4}$ c) $\sin\frac{8\pi}{3}$ d) $\sin\frac{7\pi}{12}$ e) $\cos\frac{5\pi}{12}$ f) $\sin\frac{11\pi}{12}$

20. Skriv följande uttryck om med hjälp av $\sin x$ och $\cos x$

a) $\cos(\pi + x)$ b) $\sin(2\pi - x)$ c) $\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ d) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

21. Rita grafen till funktionerna

a) $2\cos(x - \frac{\pi}{3})$ b) $1 + \sin(x + \frac{\pi}{4})$

22. a) Låt $\sin\vartheta = \frac{3}{5},\ \vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Beräkna $\cos\vartheta$ och $\tan\vartheta$.

b) Låt $\tan\vartheta = 2,\ \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Beräkna $\sin\vartheta$ och $\cos\vartheta$.

c) Låt $\cos\vartheta = \frac{1}{3},\ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Beräkna $\sin\vartheta$ och $\tan\vartheta$.

d) Låt $\cos\vartheta = -\frac{5}{13},\ \vartheta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$. Beräkna $\sin\vartheta$ och $\tan\vartheta$.

23. Visa följande formler

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ b) $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2}$ c) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$

24. Beräkna

a) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\arccos\frac{1}{2}$ c) $\arccos -\frac{1}{2}$ d) $\arctan 1$

e) $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{3})$ f) $\arccos(\cos -\frac{\pi}{5})$ g) $\arctan(\tan\frac{\pi}{7})$

25. Visa formeln $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$ for $-1 < x < 1,\ -1 < y < 1$.
Vad gäller om $x > 1,\ y > 1$?

26. Visa att $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ om $x > 0$.

27. Bevisa Machins formel $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

28. Rita grafen till

a) $\sin(\arcsin x)$ b) $\arcsin(\sin x)$ c) $\arctan(\tan x)$