Övningar till Kap. 4.

1. Beräkna derivatorna till följande funktioner

a) $3x^2 - 5x + 7 - \frac{9}{x}$ b) $4\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ c) $x^{37} - x^{-37}$
d) $x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{5}}$ e) $(3x-2)(1-5x)$ f) $\sqrt{x}(2 - x + \frac{x^3}{5})$
g) $\dfrac{1}{2x+4}$ h) $\dfrac{1}{4-2x}$ i) $\dfrac{1}{2x^2+4}$
j) $\dfrac{\pi}{2+\pi x}$ k) $x\sqrt{x}$ l) $x\sqrt{1-x^2}$
m) $\sqrt{x\sqrt{x}}$ n) $\dfrac{x}{1+x^2}$ o) $\dfrac{x+2}{x-2}$
p) $\dfrac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$ q) $e^x(x^2 - 2x + 2)$ r) $x^n e^x$
s) $\ln(x^2 + 2x + 1)$ t) $\ln x + \ln \frac{1}{x}$

2. Beräkna derivatorna till följande funktioner

a) $\sin 2x$ b) $\sin^2 x$ c) $\sin x \cos x$
d) $\dfrac{1}{\sin x}$ e) $e^x(\sin x + \cos x)$ f) $\arcsin \frac{x}{a}$
g) $\arctan \frac{x}{a}$ h) $\arcsin \frac{1}{x}$ i) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$
j) $\tan 3x$ k) $\cos \sqrt{x}$ l) $\sin(x^3 + 5x)$
m) $(x^3 + x^{\frac{1}{3}}) \sin 3x$ n) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ o) $\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$
p) $(\sin x)^{\tan x}$

3. Beräkna derivatorna till följande funktioner

a) $(2x+4)^9$ b) $\sqrt{1-3x^2}$ c) $|1-x^2|$ d) $\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$
e) e^{x^3} f) $x \sin \sqrt{x}$ g) $\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
h) $\arcsin \sqrt{1 + e^{3x}}$ i) $x \ln x$ j) $\ln \frac{1}{x}$
k) $\ln \tan \frac{x}{2}$ l) $\sqrt{1 + \cos x}$ m) $\sqrt[3]{1 + \cos x}$
n) $\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})$ o) x^x p) $x^{\frac{1}{x}}$

4. Beräkna derivatorna till funktionerna

a) $\arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ b) $\cos(2 \arctan x)$ c) $\arctan(x - \sqrt{1+x^2})$
d) $\sqrt{\sin^3 x + \cos^3 x}$ e) $\arctan \dfrac{37+x}{1-37x}$

5. Visa att $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ då $x \neq 0$.

6. Derivera funktionen

$$f(x) = e^{\cos x}\frac{(x^2+2)^6(1-x)^5}{(x^6+x^3+1)^4}$$

7. Visa att funktionen $f(x) =$ är deriverbar och bestäm $f'(x)$ genom att använda derivatans definition, där

a) $f(x) = e^x$ b) $x|x|$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

8. För vilka x är $f(x) = |x^2 - 1|$ deriverbar? Bestäm $f'(x)$ för dessa x. Rita kurvorna $y = f(x)$ och $y = f'(x)$. Ar f' deriverbar? Vad är i så fall derivatan?

9. Bestäm tangenten till kurvan $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ i punkten $(0, 0)$.

10. Låt $y = (2x^2 + 1)^{x+a}$ och låt $y'(1) = 0$. Bestäm a.

11. Låt $y = e^{x^2+ax}$, där a är någon konstant. Finn alla a för vilka $y' = 0$ i punkten $x = 0$.

12. Låt $y = \ln(x^2 + 1)$. För vilka x är $|y'| = 1$?

13. Låt $f(x) = \ln(1 + x) + \ln(1 - x)$. För vilka x gäller att $f'(x) = 1$?

14. Låt $y = \ln(x^2 + 6x + 10)$. För vilka x är $y' = 1$?

15. Låt $f(x) = x^2 - 4x + 3$. På intervallet $(2, \infty)$ har f en deriverbar invers. Bestäm $(f^{-1})'(3)$.

16. Härled derivatan till $\sqrt[n]{x}$ genom att utgå ifrån att $\sqrt[n]{x}$ ar inversfunktion till x^n och att $Dx^n = nx^{n-1}$.

17. Beräkna

a) $D^n(\sin 2x + \cos 2x)$ b) $\dfrac{d^{50}}{dx^{50}}\sin x \cos x$ c) $D^{37}(x^2 \cos 3x)$

d) $D^{37}(x^3 e^{2x})$

18. Undersök om funktionen f antar ett största eller minsta värde i intervallet I och bestäm i förekommande fall f:s extremvärden då

a) $f(x) = x + 2,\ I = [-1, 1]$ b) $f(x) = x + 2,\ I = [-1, 1)$

c) $f(x) = x - 2|x|,\ I = [-1, 1]$ d) $f(x) = x - 2|x|,\ I = (-1, 1]$

e) $f(x) = \ln(\sin x),\ I = (0, \pi)$ f) $f(x) = |\sin x|,\ I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

19. Undersök om funktionen f antar ett största eller minsta värde i intervallet I och bestäm i förekommande fall f:s extremvärden då
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2,\ I = [-2, 2]$
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3,\ I = [-2, 2]$ c) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x,\ I = [-1, 1]$
d) $f(x) = x - x^{\frac{2}{3}},\ I = [-1, 2]$ e) $f(x) = |x^2 - x - 2|,\ I = [-3, 3]$
f) $f(x) = (x + 2)^{\frac{2}{3}},\ I = (-\infty, \infty)$

20. Bestäm störste och minste värdet av $f(x) = \sin x - x + x^3/6$ i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

21. Avgör i vilka intervall följande funktioner är växande respektive avtagande samt bestäm eventuella lokala extrempunkter till funktionerna

a) $x^2 - x + 2$ b) $x^3 + 2x$ c) $x^3 - 3x - 2$
d) $x(x - 1)^2$ e) $x(x^2 - 1)$ f) $\dfrac{x^2}{x^2 + 1}$
g) $x\sqrt{2 - x^2}$ h) xe^{-x} i) $\sin x + \cos x$
j) $x - 2\sin x$ k) $2x - \arcsin x$ l) $\dfrac{\ln x}{x}$
m) $|x^2 - 1|$ n) $\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1}$

22. Rita kurvan för följande funktioner. Ange speciellt lokala extremvärden och asymptoter. Ange också inflexionspunkter.

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ b) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ c) $\dfrac{x^3}{(x + 1)2}$
d) $\dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ e) $\dfrac{4 + x}{2 + |x|}$ f) x^2e^{-x}
g) $\dfrac{x^4 + x^2}{x^4 + 1}$ h) $\dfrac{xe^x}{1 + e^x}$ i) $(x^2 - 1)^3$

23. Rita kurvorna

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x - 1)^2}$
c) $h(x) = \dfrac{9x + x^3}{x - x^3}$.

24. Undersök kurvan $y = e^{\frac{1}{x}}(x - 2)$ med avseende på extremvärden och asymptoter.

25. Skissa kurvan $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ med angivande av asymptoter, lokala extremvärden och inflexionspunkter.

26. Rita kurvan $y = (x^2 - 3)e^x$. Undersök var kurvan är konvex och var den är konkav. Ange också alla inflexionspunkter.

27. Undersök följande funktioner och rita grafen

a) $y = (x + 3)\ln(x + 3)$ b) $y = (2x + 3)e^{x^2}$ c) $y = (x^2 - x - 5)e^{-x}$

d) $y = x^{\frac{1}{x}},\ x \geq 1$ e) $y = (x^2 - 6x + 9)e^{x+3}$ f) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$

28. Bestäm storsta möjliga arean av en rektangel med omkretsen 4.

29. Visa att $\arcsin 2x\sqrt{1 - x^2} = 2\arcsin x$ för $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Undersök även fallet $\frac{1}{2}\sqrt{2} < |x| < 1$.
Ledning: två funktioner med samma derivata skiljer sig åt med en konstant.