MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tenta MAL 400 Analys, 981023

1. a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2}{x^3-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=3\,,$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}=0\,.$$

2.

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x-\sin x}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to0}\frac{4\frac{\tan 4x}{4x}-\frac{\sin x}{x}}{-\frac{\ln(1-x)}{-x}}=\frac{4-1}{-1}=-3\,.$$

3. Låt $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{x^2+x}{x^2+1}-1\right|=\left|\frac{x-1}{x^2+1}\right|\le\left|\frac{x}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|\,.$$

Om $x>\frac{1}{\varepsilon}$ då är $\left|\frac{x^2+x}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$, alltså är $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2+1}=1$.

4.

$$\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{98+x}{1-98x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{98+x}{1-98x}\right)^2}\frac{(1-98x)+98(98+x)}{(1-98x)^2}$$
$$=\frac{1+98^2}{(1-98x)^2+(98+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

Observera att 98 förekommer inte i svaret. Ur formeln $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ följer att $\arctan u+\arctan v=\arctan\frac{u+v}{1-uv}$ och darmed är $\frac{d}{dx}\arctan\frac{98+x}{1-98x}=\frac{d}{dx}(\arctan 98+\arctan x)=\frac{d}{dx}\arctan x$.

5.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{h^2\cos\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to0}h\cos\frac{1}{h}=0.$$

6. I. Definitionsområdet av funktionen $f(x)=x\ln|x|$ är $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vi beräknar gränsvärdet $\lim_{x\to0}x\ln|x|$. Om $x>0$ då är $\lim_{x\downarrow0}x\ln x=0$, och om $x<0$, $x=-y$, då är $\lim_{x\uparrow0}x\ln-x=\lim_{y\downarrow0}-y\ln y=0$. Vidare är $\lim_{x\to\infty}x\ln|x|=\infty$ och $\lim_{x\to-\infty}x\ln|x|=-\infty$. Vi har $f(x)=0$ omm $\ln|x|=0$ omm $x=\pm1$. Detta ger

-1		0		1	x
$-$	0	$+$	0	$-$ 0 $+$	f

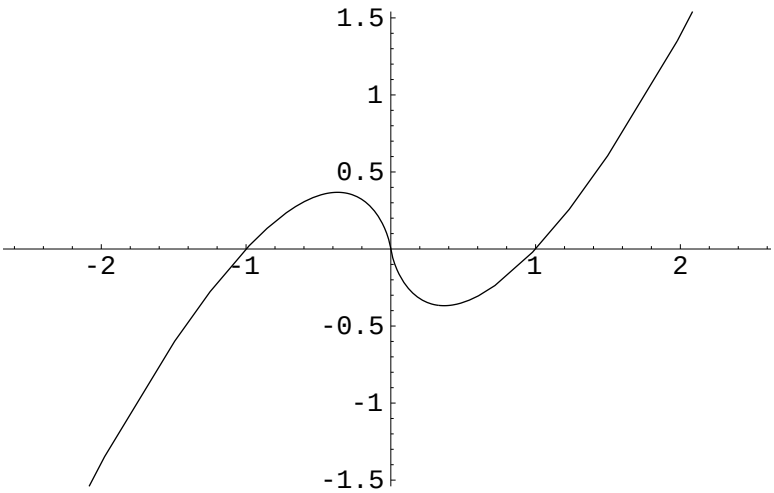
II. Om $x \neq 0$ är $f'(x) = \ln|x| + 1$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h\ln|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \ln|h| = \infty\,,$$

vad som är lika med $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Vi har $f'(x) = 0$ omm $\ln|x| = -1$, dvs $x = \pm\frac{1}{e}$, och $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, $f(-\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$. Vi får

x	$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$	
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	↗	lok max	↘	0 ↘	lok min	↗

och grafen ser ut som



7.

$$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x\,d\cos x = -\int 1-\cos^2 x\,d\cos x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\,.$$

8.

$$\int_0^2 x(x-2)^{37}\,dx = \frac{1}{38}x(x-2)^{38}\,\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{38}(x-2)^{38}\,dx$$
$$= 0 - \frac{1}{38\cdot 39}(x-2)^{39}\,\Big|_0^2 = \frac{(-2)^{39}}{38\cdot 39} = -\frac{2^{39}}{38\cdot 39}\,.$$