MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tenta MAL 400 Analys, 991023

1. a) $\sqrt{x^2+x}-x=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ då $x\to\infty$.
b) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}=\infty$ och $\lim_{x\to-\infty}(-x)=\infty$ så $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\infty$.

2. $\frac{d}{dx}\tan x=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$
$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h\cos x+\sin h\cos^2 x-\cos x\cos h\sin x+\sin h\sin^2 x}{h\cos(x+h)\cos x}=$
$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\cos(x+h)\cos x}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\left(\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

3. Låt $\varepsilon>0$. Vi har

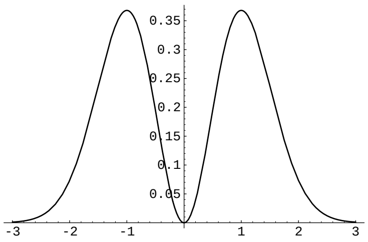
$$\left|\frac{\sin x^2}{x^2}-0\right|=\left|\frac{\sin x^2}{x^2}\right|\le\left|\frac{1}{x^2}\right|.$$

Om $x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ då är $\left|\frac{\sin x^2}{x^2}-0\right|<\varepsilon$, alltså är enligt definitionen $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^2}{x^2}=0$.

4. I. Definitionsområdet av funktionen $f(x)=x^2e^{-x^2}$ är $\mathbb{R}$. Vi beräknar $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Vi har $f(x)=0$ omm $x^2=0$ omm $x=0$. För andra värden av x är $f(x)>0$.
II. Vi har $f'(x)=(2x-2x^3)e^{-x^2}$ och $f'(x)=0$ om $x=0$ eller $x=\pm 1$. Observera att $f(\pm 1)=\frac{1}{e}$. Vi får:

	-1		0		1		x
$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	f'
$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	f

III. Vi har $f''(x)=(2-10x^2+4x^4)e^{-x^2}$ och $f''(x)=0$ omm $x^2=(5\pm\sqrt{17})/4$. Inflexionspunkter finns för $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}\approx\pm 1,5$ och $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}\approx\pm 0,5$. Grafen ser ut som



5. Substituera $\sqrt{x+1}=t$, $x=t^2-1$ och $dx=2t\,dt$. Då är $\int\cos\sqrt{x+1}\,dx=\int 2t\cos t\,dt=2t\sin t-2\int\sin t\,dt=2t\sin t+2\cos t+C=2\sqrt{x+1}\sin\sqrt{x+1}+2\cos\sqrt{x+1}+C$.

6. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\,dx=\sin x\,\big|_0^{\pi/2}-\sin x\,\big|_{\pi/2}^{3\pi/2}+\sin x\,\big|_{3\pi/2}^{2\pi}=(1-0)+(1-(-1))+(1-0)=4$.