MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tenta MA 1200 Analys 1, 000103

3. Substituera $\sqrt{x+1} = t$, $x = t^2 - 1$ och $dx = 2t\,dt$. Då är $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx = \int 2te^t\,dt = 2te^t - 2\int e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} + 2e^{\sqrt{x+1}} + C$.

4. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi/2} 1 - \sin^2 x\,d\sin x = \sin x\,|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\sin^3 x\,|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

5. a) $\sqrt{x^2+2000x} - x = \frac{2000x}{\sqrt{x^2+2000x}+x} = \frac{2000}{\sqrt{1+\frac{2000}{x}}+1} \to \frac{2000}{1+1} = 1000$ då $x \to \infty$.

b) $\dfrac{\tan x}{e^{3x} - e^x} = \dfrac{\frac{\tan x}{x}}{2e^x\frac{e^{2x}-1}{2x}} \to \dfrac{1}{2} =$ då $x \to 0$.

6. Låt $\varepsilon > 0$. Vi har

$$\left|\frac{\cos x^2}{x^2} - 0\right| = \left|\frac{\cos x^2}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right| .$$

Om $x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ då är $\left|\frac{\cos x^2}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$, alltså är enligt definitionen $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x^2}{x^2} = 0$.

7. $\frac{d}{dx}\ln x = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$.

8. I. Definitionsområdet av funktionen $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$ är $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Vi beräknar $\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
II. Vi har $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ och $f'(x) = 0$ om $x = 0$ eller $x = 2$; $f(0) = 2$ och $f(2) = 6$.
Vi får:

	0		1		2		x
$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$	f'
$\nearrow$	max	$\searrow$	$*$	$\searrow$	min	$\nearrow$	f

III. Delning med rest ger $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$, så $y = x + 3$ är sned asymptot.
Grafen ser ut som