MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tenta MAL 400 Analys, 000103

1. Substituera $\sqrt{x+1}=t$, $x=t^2-1$ och $dx=2t\,dt$. Då är $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx=\int 2te^t\,dt=2te^t-2\int e^t\,dt=2te^t-2e^t+C=2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}}+2e^{\sqrt{x+1}}+C$.

2. $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\pi/2}1-\sin^2 x\,d\sin x=\sin x\,|_0^{\pi/2}-\frac{1}{3}\sin^3 x\,|_0^{\pi/2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

3. a) $\sqrt{x^2+2000x}-x=\frac{2000x}{\sqrt{x^2+2000x}+x}=\frac{2000}{\sqrt{1+\frac{2000}{x}}+1}\to\frac{2000}{1+1}=1000$ då $x\to\infty$.

b) $\dfrac{\tan x}{e^{3x}-e^x}=\dfrac{\frac{\tan x}{x}}{2e^x\frac{e^{2x}-1}{2x}}\to\dfrac{1}{2}=$ då $x\to 0$.

4. Låt $\varepsilon>0$. Vi har

$$\left|\frac{\cos x^2}{x^2}-0\right|=\left|\frac{\cos x^2}{x^2}\right|\le\left|\frac{1}{x^2}\right|.$$

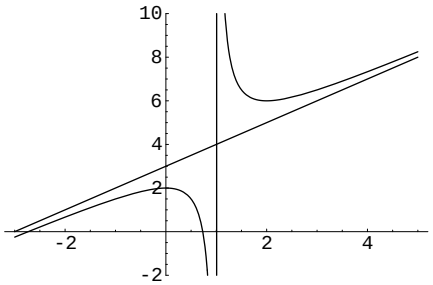
Om $x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ då är $\left|\frac{\cos x^2}{x^2}-0\right|<\varepsilon$, alltså är enligt definitionen $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x^2}{x^2}=0$.

5. $\frac{d}{dx}\ln x=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$.

6. I. Definitionsområdet av funktionen $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x-1}$ är $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Vi beräknar $\lim_{x\downarrow 1}f(x)=\infty$, $\lim_{x\uparrow 1}f(x)=-\infty$ och $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.
II. Vi har $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ och $f'(x)=0$ om $x=0$ eller $x=2$; $f(0)=2$ och $f(2)=6$.
Vi får:

	0		1		2		x
$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$	f'
$\nearrow$	max	$\searrow$	$*$	$\searrow$	min	$\nearrow$	f

III. Delning med rest ger $f(x)=x+3+\frac{1}{x-1}$, så $y=x+3$ är sned asymptot.
Grafen ser ut som



7. $x+x^3+x^5+x^7+\cdots=\frac{x}{1-x^2}$ om $|x|<1$, ∞ om $x\ge 1$ och divergent om $x\le -1$.

8. a) $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ omm $xy=0$, d v s $x=0$ eller $y=0$.
b) $\ln(x+y)=\ln x+\ln y$ omm $x+y=xy$ och $x>0$, $y>0$, d v s $y=\frac{x}{x-1}$, $x>1$.