En fixpunktssats

Sats. *Antag att f är en deriverbar funktion som avbildar intervallet $I = [a, b]$ in i sig själv. Om $|f'(x)| \leq c < 1$ för alla x i I så har ekvationen $x = f(x)$ precis en rot (en fixpunkt) r. Om vi låter x_0 vara en godtycklig punkt i I och definierar x_n rekursivt genom*

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

så gäller $\lim_{n\to+\infty} x_n = r$.

Bevis:

Existensen.
Betrakta funktionen $g(x) = x - f(x)$. Eftersom $f(x) \in I$ så gäller $f(x) \geq a$ och $g(a) = a - f(a) \leq 0$. På liknande sätt får vi också $g(b) = b - f(b) \geq 0$. Satsen om mellanliggande värde ger därför att $g(r) = 0$ för något $r \in I$, dvs. $r = f(r)$.

Resten av beviset bygger på medelvärdessatsen; $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$.

Entydigheten.
Antag att $\tilde{r}$ är en annan fixpunkt, $\tilde{r} = f(\tilde{r})$. Då gäller $|r - \tilde{r}| = |f(r) - f(\tilde{r})| = |f'(\xi)(r - \tilde{r})| \leq c|r - \tilde{r}|$ eller $(1 - c)|r - \tilde{r}| \leq 0$ vilket, eftersom $1 - c > 0$, ger att $|r - \tilde{r}| = 0$ och $r = \tilde{r}$.

Konvergensen.
Vi har $x_1 - r = f(x_0) - f(r) = f'(\xi_1)(x_0 - r)$ så $|x_1 - r| \leq c|x_0 - r|$. På samma sätt får vi $|x_2 - r| = |f'(\xi_2)(x_1 - r)| \leq c|x_1 - r| \leq c^2|x_0 - r|$. Upprepar vi detta får vi $|x_n - r| = |f(x_{n-1}) - f(r)| \leq c|x_{n-1} - r| \leq c^2|x_{n-2} - r|$
$\leq \ldots \leq c^n|x_0 - r|$. Eftersom $c < 1$ gäller $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ och vi får $\lim_{n\to\infty} |x_n - r| = 0$ och alltså $\lim_{n\to\infty} x_n = r$.

Anmärkning. Satsen gäller även då $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$. Om t.ex. $b = \infty$ så följer existensen eftersom $\lim_{x\to\infty} x - f(x) = +\infty > 0$. (Visa det!) Beviset av entydigheten och konvergensen är detsamma.