

Analys, fortsättningskurs

Inlämningsuppgift 2

Ordinära differentialekvationer

Inlämning senast måndagen den 15 oktober.

1. (a) Skriv ett MATLAB-program som använder Eulers metod för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

- (b) Använd programmet för att lösa ekvationen

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

och jämför med den ”riktiga” lösningen.

2. (a) Lös ekvationen

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

analytiskt.

- (b) Formulera ekvationen som ett system av ekvationer och lös det med **ode45** i MATLAB. Jämför lösningarna.

3. 1915 presenterade Einstein sin berömda allmänna relativitetsteori som är en teori för gravitation. Långt tidigare hade Newton funnit en teori för gravitation som ni säkert redan är bekanta med. Newtons teori beskriver till god noggrannhet planeternas banor runt solen. Enligt denna teori rör sig planeterna i slutna ellipser. Observationer på Merkurius bana visade dock att denna inte var sluten utan ellipserna ”vandrade runt”

(kallas perihelion precession, dvs. positionen för det minsta avståndet till solen ändras för varje varv). Man försökte förklara denna precession med att intilliggande planeter inverkar. När man tog med dessa faktorer saknades det ändå 43 bågsekunder per århundrade vilket man inte lyckades hitta någon förklaring till. När Einstein hade funnit sin relativitetsteori prövade han den genast på Merkurius bana och fann att hans teori gav en precession på 43 bågsekunder per århundrade! Detta var en stor triumf för Einstein då detta starkt indikerade att hans teori var korrekt. Alltsedan dess har man testat Einsteins teori på en mängd astronomiska observationer och hittills har dessa bekräftat Einsteins allmänna relativitetsteori.

I denna laboration ska vi beräkna banor för en kropp (t.ex. en planet) kring en sfäriskt symmetrisk massa (t.ex. solen) med både Newtons och Einsteins gravitationsteorier.

Vi låter r beteckna radien (vilket i Einsteins teori dock inte riktigt betyder den radie vi först tänker på) och vi låter φ beteckna vinkeln (kropparnas banor ligger i ett plan, dvs. banorna beskrivs fullständigt av koordinaterna r och φ .) Ekvationen för en kropps bana kring en sfärisk kropp ges av

$$\begin{cases} d^2r/dt^2 = -dV/dr, \\ d\varphi/dt = L/r^2, \end{cases} \quad (1)$$

där

$$V(r) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2},$$

i Newtons teori och

$$V(r) = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3},$$

i Einsteins teori. Här är M den sfäriska kroppens massa och L är rörelsemängdsmomentet hos den andra kroppen.

- (a) Skriv ekvation (1) som ett första ordningens system med tre obekanta funktioner.
- (b) Låt $M = 1$ och låt $L = 4$. Beräkna banan enligt Newtons teori med `ode45` och rita den i xy -planet ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$). Ett lämpligt tidsintervall är $[0, 2000]$ och lämpliga startvärden är $r = 15$, $r' = 0$, $\varphi = 0$. Beräkna nu motsvarande bana med Einsteins teori istället. Observera att banorna ej längre är slutna.

- (c) Gör om uppgift 3b med värdet $L = 3$ istället.
Vi ser att Einsteins teori ger en “crash orbit” medan vi fortfarande har elliptiska banor i Newtons teori.
- (d) Låt nu $L = 5$ och låt startvärdet på r vara 8. Beräkna banorna i de bägge fallen.
I dessa fall har vi att göra med “fly-by orbits”.

Experimentera gärna själv med olika startvärden!

Redovisning: utskrifter av de lösningar/banor som efterfrågas i uppgifterna.