

Lösningsförslag

Tenta 18 augusti 2004

1. Vi ser direkt att noll är en lösning. Den andra hittar vi med Newton-Raphsons metod: Sätt $f(x) = e^{x^2} - x^3 - x^2 - 1$ och välj $x_0 = 1$ som startvärde. Definiera en talföljd rekursivt genom att sätta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n^2} - x_n^3 - x_n^2 - 1}{2x_n e^{x_n^2} - 3x_n^2 - 2x_n}.$$

Efter ett par iterationer ser vi att följden stabiliserar sig runt 1.1836 som alltså är den andra roten.

2. Från standardutvecklingarna ser vi att

$$\sin x = x + \mathcal{O}(x^3),$$

$$\cos x = 1 + \mathcal{O}(x^2),$$

$$\ln(1+t) = t + \mathcal{O}(t^2).$$

Alltså får vi

$$\begin{aligned} \frac{\ln(\cos x)}{\tan x} &= \frac{\ln(1 + \mathcal{O}(x^2))}{x + \mathcal{O}(x^3)} \cos x \\ &= \frac{\mathcal{O}(x^2)}{x + \mathcal{O}(x^3)} \cos x \\ &= \frac{\mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x^2)} \cos x \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3. Den integrerande faktorn blir $e^{-\ln(1+x^2)} = 1/(1+x^2)$. Efter multiplikation av ekvationen med denna får vi

$$\frac{x+x^3}{1+x^2} = \frac{y'(x)}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}y(x) = \left(\frac{y(x)}{1+x^2}\right)'$$

Alltså gäller

$$\frac{y(x)}{1+x^2} = \int \frac{x+x^3}{1+x^2} dx = \int x dx = x^2/2 + C$$

och lösningen blir alltså

$$y(x) = (1 + x^2)x^2/2 + C(1 + x^2).$$

4. Vi använder kvotkriteriet för att hitta konvergensraden: Betrakta kvoten

$$\left| \left(\frac{\sin(1/(n+1))}{\sqrt{n+1}} x^{n+1} \right) / \left(\frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}} x^n \right) \right|$$

av term $n+1$ och term n i serien. Vi undersöker om denna har ett gränsvärde då $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\sin(1/(n+1))}{\sqrt{n+1}} x^{n+1} \right) / \left(\frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}} x^n \right) \right| &= \frac{|\sin(1/(n+1))|}{|\sin(1/n)|} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \\ &= \frac{|\sin(1/(n+1))|}{1/(n+1)} \frac{|\sin(1/n)|}{1/n} \frac{n}{n+1} \sqrt{\frac{n}{n+1}} |x| \\ &\rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot |x| = |x|, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Rotkriteriet säger att serien är absolutkonvergent om detta gränsvärde är < 1 och divergent om det är > 1 . Potensserien är alltså absolutkonvergent om $|x| < 1$ och divergent om $|x| > 1$ så konvergensraden är 1. När $|x| = 1$ får vi ingen information från rotkriteriet utan vi måste undersöka detta fall separat. Vi betrakta serien

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

Om denna är konvergent så är vår potensserie absolutkonvergent för $|x| = 1$. Från standardutvecklingen ser vi att $\sin(1/n)$ beter sig som $1/n$ då n är stort. Vi jämför därför vår serie (??) med den konvergenta serien $\sum 1/n^{3/2}$. Vi använder jämförelsekriteriet på gränsvärdesform och beräknar alltså gränsvärdet

$$\left(\frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}} \right) / \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right) = \frac{\sin(1/n)}{1/n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty$$

som är ändligt och nollskilt. Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger nu att serien (??) är konvergent och alltså är vår potensserie konvergent för $|x| = 1$.

SVAR: Serien konvergerar för $-1 \leq x \leq 1$.

5. Vi låter $m(t)$ vara antal gram bakterier i odlingen vid tiden t och $N(t)$ vara antal gram näring i odlingen vid tiden t . Första påståendet i uppgiften säger

att $m'(t) = 2N(t)$. Andra påståendet säger att $m(0) = 1$ och att $N(0) = 0$. De två sista påståendena kan sammanfattas i: $N'(t) = t + 1 - m(t)/2$. Deriverar vi ekvationen $m'(t) = 2N(t)$ och utnyttjar uttrycket för $N'(t)$ får vi differentialekvationen

$$m''(t) = 2N'(t) = 2t + 2 - m(t).$$

Karaktäristiska ekvationen blir $r^2 + 1 = 0$ med rötterna i och $-i$. Homogenlösningarna är alltså $C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Vi ansätter ett förstgradspolynom som partikulärlösning, $At + B$, och försöker anpassa koefficienterna A och B . Insättning av ansatsen i differentialekvationen ger

$$0 = 2t + 2 - At - B.$$

Så $2t + 2$ är en partikulärlösning. Alltså:

$$m(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2t + 2.$$

För att bestämma konstanterna C_1 och C_2 använder vi begynnelsevillkoren $m(0) = 1$ och $N(0) = 0$. Det sista villkoret ger att $m'(0) = 0$. Vi får alltså:

$$1 = m(0) = C_2 + 2$$

$$0 = m'(0) = C_1 + 2$$

så $C_1 = -2$ och $C_2 = -1$. Lösningen blir alltså

$$m(t) = -2 \sin t - \cos t + 2t + 2.$$

6. För att visa existensen av en rot sätter vi $g(x) = f(x) - x$. Eftersom f avbildar I in i sig själv gäller att $g(a) = f(a) - a \geq 0$ och $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Enligt satsen om mellanliggande värde finns alltså ett r i I så att $0 = g(r) = f(r) - r$ och alltså finns minst en rot till ekvationen $f(x) = x$ i I .

För att visa entydigheten antar vi att både r och r' är rötter. Enligt medelvärdessatsen gäller att $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$ för något ξ mellan x och y . Eftersom r och r' är rötter till ekvationen $f(x) = x$ och $|f'(x)| \leq c$ för alla x i I gäller därför

$$|r - r'| = |f(r) - f(r')| = |f'(\xi)||r - r'| \leq c|r - r'|.$$

Så att $(1 - c)|r - r'| \leq 0$ och då $1 - c \geq 0$ kan detta bara gälla om $|r - r'| = 0$, dvs. $r = r'$. Alltså kan det inte finnas fler än en rot.