

Extraövningar till MAL600

1. Var är följande funktioner kontinuerliga, vänster/högerkontinuerliga eller diskontinuerliga?

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} & b) f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases} \\ c) f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} & d) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 0,987 & x > 1 \end{cases} \end{array}$$

2. Använd intervallhalvering för att lösa följande ekvationer med 3 decimalers noggrannhet.

$$\begin{array}{ll} a) x^3 + x - 1 = 0 & b) \cos x - x = 0 \\ c) \sin x + 1 - x^2 = 0 \text{ (2 rötter)} & d) x^4 - x - 1 = 0 \text{ (2 rötter)} \end{array}$$

3. Använd Medelvärdessatsen på intervallet $[0, x]$ för att visa : $\cos x \geq 1 - x^2/2$ för $x \geq 0$.

Ledning : Betrakta funktionen $f(x) = \cos x + x^2/2$ och övertyga dig om att det räcker att visa olikheten för $0 \leq x \leq \pi$.

4. Visa att $\tan x \geq x$ för $0 \leq x \leq \pi/2$.

5. Antag att f är (minst) en gång deriverbar på intervallet I och att $f = 0$ i $n \geq 2$ olika punkter i I . Visa att $f' = 0$ i åtminstone $n - 1$ punkter i I .

6. Antag att f är två gånger deriverbar på I och att $f = 0$ i åtminstone tre olika punkter i I . Visa att $f'' = 0$ i någon punkt i I .

7. Antag att f är två gånger deriverbar på I , att 0 och $2 \in I$ och att $f(0) = f(1) = 0$ och $f(2) = 1$. Visa att

$$\begin{array}{ll} a) f'(a) = 1/2 \text{ för något } a \in I & b) f''(b) > 1/2 \text{ för något } b \in I \\ c) f'(c) = 1/7 \text{ för något } c \in I & \end{array}$$

8. Är följande påståenden sanna eller falska? Ge bevis eller motexempel.

- a) Om $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existerar men $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ inte gör det, så existerar inte $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$.
- b) Om varken $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ eller $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existerar så existerar inte $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$.
- c) Om f är kontinuerlig i a så är även $|f|$ det.
- d) Om $|f|$ är kontinuerlig i a så är också f det.
- e) Om $f(x) < g(x)$ för all x i ett intervall runt a och om både $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existerar så gäller $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

9. Beräkna följande gränsvärden.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x^3+2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}$

10. Definiera följande funktioner i punkten a så att de blir kontinuerliga.

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $a = 2$ b) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}$, $a = 3$

11. Använd fixpunktsiteration för att lösa följande ekvationer med 3 decimalers noggrannhet.

a) $\cos \frac{x}{3} = x$ b) $1/(2+x^2) = x$

12. Använd Newton-Raphsons metod för att

- a) hitta roten till ekvationen $x^3 + 2x - 1 = 0$ i intervallet $[0, 1]$.
- b) lösa ekvationen $\sin x = 1 - x$.
- c) hitta den positiva roten till ekvationen $\cos x = x^2$.
- d) roten till ekvationen $\tan x = x$ i intervallet $[\pi/2, 3\pi/2]$.

13. Tillämpa Newton-Raphsons metod på

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

med startvärde $x_0 = a > 0$. Vad händer? Varför? Rita och förklara.

14. Lös ekvationen $x^3 + 10x - 10 = 0$ genom att skriva om den som $1 - x^3/10 = x$.

15. Använd definitionen för att beräkna Taylorpolynomen till följande funktioner kring angiven punkt t.o.m angiven grad.

- a) $f(x) = e^{-x}$, kring $x = 0$, av grad 4
- b) $f(x) = \cos x$, kring $x = \pi/4$, av grad 3

16. Använd kända Maclaurinutvecklingar för att Taylorutveckla följande funktioner kring angivna punkter.

- a) $f(x) = e^{3x}$, kring $x = -1$
- b) $f(x) = \sin^2 x$, kring $x = 0$

Ledning: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

17. Hitta ett närmevärde på $9^{1/3}$ genom att Taylorutveckla $f(x) = x^{1/3}$ runt $x = 8$.

18. Hitta ett närmevärde på $1/\sqrt{e} = e^{-0.5}$ genom att Taylorutveckla $f(x) = e^x$ runt origo.

19. Visa att origo är en stationär punkt till $f(x) = \ln(1+x) \arctan 2x - 2x^2$. Har f ett lokalt extremvärde där?

20. Antag att f''' är kontinuerlig i ett intervall innehållande x . Beräkna

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}.$$

Ledning: Taylorutveckla t.o.m. ordning tre.

21. Beräkna summan av följande serier.

$$\begin{array}{ll} a) \sum_1^\infty 1/3^n & b) \sum_1^\infty 3(-1/4)^{n-1} \\ c) \sum_5^\infty 1/(2+\pi)^{2n} & d) \sum_0^\infty 5/10^{3n} \end{array}$$

22. I början av varje år sätts 1000 kr. in på ett konto. Räntan är 10 procent per år och betalas ut i slutet av året. Hur mycket finns på kontot efter 8 år? (Innan år 0 fanns inget på kontot.)

23. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Ge bevis eller motexempel.

- a) Om $a_n = 0$ för alla n så är $\sum_0^n a_n$ konvergent.
- b) Om $\sum_0^n a_n$ är konvergent så är $\sum_0^n 1/a_n$ divergent.
- c) Om $\sum_0^n a_n$ och $\sum_0^n b_n$ båda är divergenta så är $\sum_0^n a_n + b_n$ divergent.
- d) Om $a_n \geq c > 0$ för alla n så divergerar $\sum_0^n a_n$ mot $+\infty$.
- e) Om $\sum_0^n a_n$ divergerar och följderna $\{b_n\}_0^\infty$ är begränsad så är $\sum_0^n a_n b_n$ divergent.
- f) Om $a_n > 0$ för alla n och $\sum_0^n a_n$ är konvergent så är $\sum_0^n (a_n)^2$ konvergent.

24. Använd lämpliga konvergens/divergenskriterier för att avgöra om följande serier är konvergenta eller divergenta.

$$a) \sum_1^\infty 1/(n^2 + 1) \qquad b) \sum_1^\infty n/(n^4 - 2)$$

$$c) \sum_1^\infty (n^2 + 1)/(n^3 + 1) \quad d) \sum_1^\infty \sqrt{n}/(n^2 + n + 1)$$

$$e) \sum_1^\infty 1/(\pi^n - n^\pi) \qquad f) \sum_2^\infty \sqrt{n}/(3^n \ln n)$$

25. Använd integralkriteriet för att visa att $\sum_1^\infty 1/(1+n^2)$ är konvergent och att summan är mindre än $\pi/2$.