

Matematik
Göteborgs universitet
Håkan Samuelsson

Hjälpmedel: Bifogat formelblad
Miniräknare
Telefon: Håkan Samuelsson
0740-350646

**Tentamensskrivning i MAL420/600,
Analys fortsättningskurs
22 mars 2004, 8.45-13.45**

1. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/3} - 1}{(1+x)^{1/3} - 1}.$$

2. Avgör om följande serie är konvergent eller divergent:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right).$$

3. Lös följande första ordningens differentialekvationer:

(a) $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = x, x > 0$

(b) $y(x)y'(x) = x/e^{y(x)^2}.$

4. Ekvationen $x^2 - 5 = \arctan x$ har en positiv och en negativ lösning. Använd någon iterationsmetod för att bestämma närmevärden till dessa med två korrekta decimaler.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = U \\ q(0) = 0 \\ q'(0) = 0 \end{cases}$$

där L , C , R och U är nollskilda konstanter som uppfyller $R = 2\sqrt{L/C}$. Beräkna också $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$. (Detta modellerar en kritiskt dämpad krets med en resitans, en spole och en kondensator i serie över vilken man lägger en konstant spänning. $q(t)$ är kondensatorns laddning vid tiden t .)

6. (a) Antag att f är en deriverbar (så många gånger du behöver) funktion och definiera Taylorpolynomet till f av grad 3 runt origo.
(b) Visa att Taylorpolynomet (av grad 3) är unikt, dvs. visa att om

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

och

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

så måste $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2$ och $a_3 = b_3$.

**Tentamensskrivning i MAL420/600,
Analys fortsättningskurs
13 april 2004, 8.45-13.45**

1. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{3n}}{n^3} ?$$

2. (a) Hur många lösningar har ekvationen $e^x - 1/2 = \cos x$ i intervallet $0 \leq x < \infty$? (Motivera ditt svar.)
(b) Hitta närmevärde/närmevärden till lösningen/lösningarna i intervallet $0 \leq x < \infty$ med två korrekta decimaler.

3. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 1/x^4} - 1/x^2}{1 - \cos x}.$$

4. Lös differentialekvationen

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^x.$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} \ln y(x), & x > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

ledning: Inför hjälpfunktionen $z(x) = \ln y(x)$.

6. Visa att om en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är absolutkonvergent för $x = r > 0$ så är serien absolutkonvergent för alla x sådana att $|x| \leq r$.

**Tentamensskrivning i MAL600,
Analys fortsättningskurs
18 augusti 2004, 8.45-13.45**

I lösningarna får du bara hänvisa till uträkningar som kan göras med en "typgodkänd" räknedosa. Du får alltså inte använda eventuella inbyggda program för ekvationslösning utan de succesiva beräkningarna måste redovisas. Du får inte heller hänvisa till figurer gjorda med en grafritande räknare.

1. Hitta, med två decimalers noggrannhet, de två rötterna till ekvationen

$$e^{x^2} = x^3 + x^2 + 1.$$

2. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\tan x}.$$

3. Lös differentialekvationen

$$y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = x + x^3.$$

4. För vilka reella x konvergerar potensserien

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}} x^n ?$$

5. I en viss bakterieodling kommer man fram till att tillväxthastigheten, mätt i antal gram bakterier per sekund, är två gånger så stor som totala mängden näring i odlingen, mätt i gram, vid varje tidpunkt. Vid tiden $t = 0$ finns 1 gram bakterier och ingen näring i odlingen. Därefter tillförs näring med en hastighet av $t + 1$ gram per sekund vid tiden t . Dessutom äter bakterierna av näringen med en hastighet av $m(t)/2$ gram per sekund vid tiden t där $m(t)$ betecknar antal gram bakterier i odlingen vid tiden t . Beräkna $m(t)$.
6. Antag att f är en deriverbar funktion som avbildar ett intervall $I = [a, b]$ in i sig själv. Antag också att $|f'(x)| \leq c < 1$ för alla x i I . Visa att ekvationen $x = f(x)$ har precis en rot i I .