

Supremumaxiomet och två satser i appendix C.

Några definitioner.

En *övre begränsning* till en mängd $M \subseteq \mathbf{R}$ är ett reellt tal A , sådant att $x \leq A$ för varje $x \in M$.

Undre begränsning definieras analogt.

Om M har en *minsta* övre begränsning S , så kallas S *supremum* för M . Man skriver

$S = \sup M$. En största undre begränsning kallas *infimum*. Man skriver $I = \inf M$.

Exempel: $\sup[0, 2] = 2$, $\inf[0, 2] = 0$, $\sup\{1 - e^{-x} : x \in \mathbf{R}\} = 1$ (den senare mängden har inget infimum).

Vi observerar följande ekvivalenta formulering av supremumdefinitionen:

$$S = \sup M$$

$\Leftrightarrow$

$$1) \forall x \in M : x \leq S \quad (S \text{ är en övre begränsning})$$

$$2) \forall K < S \exists x \in M : x > K. \quad (\text{Inget tal mindre än } S \text{ är en övre begränsning})$$

En viktig egenskap hos de reella talen uttrycks av följande axiom (eller sats beroende på vilken axiomatik man väljer).

Supremumaxiomet:

Varje icke-tom, uppåt begränsad delmängd av de reella talen $\mathbf{R}$ har ett supremum.

Anm: Om vi byter ut reella talen mot de rationella talen $\mathbf{Q}$, så gäller inte detta axiom. Om man ser $\mathbf{Q}$ som en delmängd av $\mathbf{R}$, så har dock varje mängd av rationella tal ett supremum i $\mathbf{R}$.

Ex: $\sup\{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\} = \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Sats om monotona begränsade talföljder:

Om en monoton talföljd är begränsad, så är den konvergent.

Bevis: Antag att följden $\{a_n\}$ är växande. Då den är uppåt begränsad och icke-tom, så har den ett supremum, som vi kallar S . Vi påstår nu att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$. Tag $\epsilon > 0$. Då finns ett N sådant att $a_N > S - \epsilon$ (jfr ovanstående omskrivning av supremumdefinitionen!). Eftersom följden är växande och uppåt begränsad av S , så gäller också $S - \epsilon < a_n \leq S$, och därmed $|a_n - S| < \epsilon$ för *alla* $n > N$. Enligt definitionen av gränsvärde har vi då fastställt att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$. Om följden i stället är avtagande, kan vi betrakta den växande följden $\{-a_n\}$. Den blir då enligt vad vi just visat konvergent med gränsvärdet $S = \sup\{-a_n\}$, varmed $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -S$. Beviset är klart.

Var god vänd!

Satsen om mellanliggande värden:

Om funktionen f är kontinuerlig i det slutna, begränsade intervallet $[a, b]$, och om $f(a) \neq f(b)$, så antar f i $]a, b[$ varje värde i intervallet $]f(a), f(b)[$.

Bevis: Antag $f(a) < f(b)$ (om $f(a) > f(b)$ kan beviset kopieras på funktionen $g = -f$). Tag nu ett mellanliggande värde μ , $f(a) < \mu < f(b)$. Sätt $M = \{x \in [a, b] : f(x) < \mu\}$. Vi konstaterar att $a \in M$ och att $x < b$ för varje $x \in M$. M är alltså icke-tom och uppåt begränsad, och har alltså ett supremum: $\xi = \sup M$. Det gäller nu att bevisa att $f(\xi) = \mu$.

1) Vi antar först att $f(\xi) < \mu$, och försöker härleda en motsägelse ur detta. Då måste gälla att $\xi < b$, eftersom $f(b) > \mu$. På grund av kontinuiteten hos f finns då ett $\delta > 0$, sådant att $f(x) < \mu$ i hela intervallet $\xi < x < \xi + \delta$. Detta motsäger att ξ är en övre begränsning för M . Antagandet är felaktigt.

2) Vi antar nu i stället att $f(\xi) > \mu$, och letar efter motsägelse. Denna gång vet vi att $\xi > a$, eftersom $f(a) < \mu$. Kontinuiteten hos f innebär då att det finns ett $\delta > 0$, så att $f(x) > \mu$ i hela intervallet $\xi - \delta < x < \xi$. Varje tal i detta intervall skulle då vara en *mindre* övre begränsning för M än ξ , vilket motsäger att ξ är supremum för M . Återstår nu bara möjligheten $f(\xi) = \mu$. Beviset klart.

Anm. "Självklarheten" i ovanstående sats blir mindre besvärande om man betraktar följande exempel. Låt $f(x) = x^2$, $D_f = [0, 2] \cap \mathbf{Q}$, dvs en bit av x^2 -kurvan definierad bara för rationella x . Vi har då f kontinuerlig, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, men det mellanliggande rationella värdet 2 antas ej av funktionen. Grafen ser för ögat exakt likadan ut som grafen för den vanliga x^2 -funktionen, definierad i hela intervallet $[0, 2]$. I satsen är det alltså viktigt att funktionen är definierad i alla *reella* tal mellan a och b .

Läs också om *intervallinkapslingssatsen* i boken! Bokens bevis av satsen om mellanliggande värden utnyttjar intervallinkapslingssatsen i stället för supremumaxiomet. Välj själv vilket bevis du föredrar.