

Mer noggrann definition av exponentialfunktionen

Vi definierar potensen a^α för basen $a > 0$ i följande steg.

I. Vi definierar a^α , då α är ett positivt heltal (dvs. 1, 2, ...) som produkten av n stycken a . (Läsaren kan lätt kontrollera, att alla räknelagarna gäller.)

II. Vi utökar definitionen till " α vilket heltal som helst": Vi låter $a^0 = 1$ och $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, för alla positiva n . (Kontrollen av räknelagarna borde göras på nytt.)

III. Vi inser att ekvationen $x^n = a$ har exakt en positiv lösning (det ska vi bevisa senare i kursen). Då definierar vi $a^{\frac{1}{n}}$ som den positiva lösningen till ekvationen. Vi ser från definitionen att $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$.

Naturligvis blir nu $a^r = (a^p)^{\frac{1}{q}}$, då $r = \frac{p}{q}$ ($q > 0$) är ett rationellt tal. Problemet med denna definition är dock, att ett rationellt tal kan skrivas som $\frac{p}{q}$ på flera sätt: Till exempel $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$. Då vi definierar $a^r = (a^p)^{\frac{1}{q}}$, anger vi inte vilken presentation som ska användas, därför måste vi visa att valet av presentation inte spelar någon roll.

För att förstå problemet, som uppstått, börja med att betrakta följande definition:

"Vi definierar $a^{\spadesuit r} = a \cdot p \cdot q$." Låt oss använda denna "definition" för att beräkna $1^{\spadesuit r}$, då $r = \frac{1}{2}$. Om vi framställer r som $\frac{2}{4}$ får vi $1^{\spadesuit r} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$, men om vi framställer r som $\frac{3}{6}$, då får vi $1^{\spadesuit r} = 1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$. Det betyder att den betraktade definitionen är otydlig, och därför inte kan användas.

Men för potenser visar vi att resultatet blir samma för alla sätt att presentera r som kvot. Låt $r = \frac{p}{q}$, där q är minsta möjliga nämnare. Då har alla framställningar av r form $\frac{sp}{sq}$ (för något heltal s). Låt $b = (a^p)^{\frac{1}{q}}$. Om vi nu visar att $(a^{sp})^{\frac{1}{sq}} = b$, för alla s , då visar det att trots de olika framställningarna ger definitionen ett och samma tal, och därmed går den att använda.

$(a^{sp})^{\frac{1}{sq}} = b$ betyder samma som $b^{sq} = a^{sp}$ (se början på steg III). $b^{sq} = (b^q)^s$ och $b = (a^p)^{\frac{1}{q}}$, så $b^{sq} = (b^q)^s = \left((a^p)^{\frac{1}{q}}\right)^q)^s = (a^p)^s = a^{sp}$, vilket vi skulle visa.

Igen, alla räknelagar borde kontrolleras, vilket lämnas åt läsaren.

IV. Efter att vi har definierat potensen a^α för alla rationella α , kan vi definiera potens för alla reella α genom att approximera α med rationella tal, och se att exponenten a^α approximeras av motsvarande exponenter. Detta kräver dock mer vana till "gränsövergång" än vi har nu.