Repetitionsuppgifter

Linjära ekvationssystem

1. Finn alla lösningar till systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ 2x_1 + ax_2 = b_2 \end{cases}$$

där a är en parameter.

   (a) Om vi sätter $b_1 = b_2 = 0$ så är $x_1 = x_2 = 0$ en lösning. För vilka värden på a finns det även andra lösningar?

   (b) Karakterisera för vart och ett av dessa $a-$värden de b_1, b_2 för vilka systemet är lösbart!

3. Välj parametrarna p och q så att nedanstående linjära ekvationssystem har

   (a) en entydigt bestämd lösning

   (b) mer än en lösning

   (c) ingen lösning

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + px_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = q \\ x_2 + x_3 = p \end{cases}$$

Linjärt oberoende, bas

4. För vilka värden på parametern p är $(1, 2, 3), (1, 2, p)$ linjärt oberoende?

5. Motivera varför vektorerna

$$(10, 9, 8, 7)\ ,\ (0, 6, 5, 4)\ ,\ (0, 0, 3, 2)\ ,\ (0, 0, 0, 1)$$

är linjärt oberoende.

6. Sätt $u_1 = (1,1,1)$ och $u_2 = (1,-1,1)$. Finn en bas i $\mathbb{R}^3$ som innehåller u_1 och u_2.

Nollrum och kolonnrum

7. Bestäm rangen för matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Vad är nollrummets dimension?

8. Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen i föregående uppgift!

9. Sätt
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
Bestäm alla vektorer u som tillhör både nollrummet och kolonnrummet för A.

10. Om $4 \times 5-$matrisen A vet man att dess rang är 2 och att vektorerna
$$(1,1,1,1,1)\ ,\ (1,0,0,0,1)\ ,\ (0,1,1,1,0)$$
ligger i dess nollrum.
    (a) Motivera varför den givna informationen är tillräcklig för att bestämma dimensionen av nollrummet för A.
    (b) Förklara varför vektorn $(2,3,3,3,2)$ måste ligga i nollrummet för A.
    (c) Avgör om den givna informationen är tillräcklig för att bestämma en bas för nollrummet till A. Finn i så fall en sådan bas!

Linjära avbildningar

11. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning vars standardmatris är
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Sätt $\mathbf{u} = (4,-1,-3)$.
    (a) Vad är bilden av $\mathbf{u}$?
    (b) Vilken vektor avbildas på $\mathbf{u}$?

12. Betrakta den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vars standardmatris är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestäm bilden av rektangeln med hörn i $(0,0), (0,3), (2,3), (2,0)$.

13. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som roterar en vektor vinkeln θ moturs. Bestäm matriserna för $T_1 = T$, $T_2 = T \circ T_1$ och $T_3 = T \circ T_2$.

14. Bestäm matrisen för den linjära avbildning man får om man först roterar runt origo vinkeln $\pi/4$ och sedan speglar i linjen $y = x$. Vilken matris får man om man gör tvärtom, först speglar och sedan roterar?

15. Standardmatrisen för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avgör om T är surjektiv, injektiv eller bijektiv.

16. Vilka vektorer ligger i värdemängden för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vars standardmatris är

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

Visa också att $T \circ T = T$.

Matrisalgebra

17. Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ -5/4 & -9/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Beräkna AB. Är A inverterbar? Är AB inverterbar?

(b) Beräkna BA. Är B inverterbar? Är BA inverterbar?

(c) Beräkna AA^T. Är AA^T inverterbar?

(d) Beräkna $A^T A$. Är $A^T A$ inverterbar?

18. Lös matrisekvationen $AXB = C$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Är matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

invers till någon matris? Vilken i så fall?

20. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska. Bevisa de sanna och motbevisa de falska.

   (a) Om matrisen A^2 är inverterbar så är också A inverterbar.

   (b) Det finns en matris A, sådan att

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) För alla $2 \times 2-$matriser A och B gäller formeln

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Determinanter

21. Beräkna volymen av den parallellepiped, som har ett hörn i origo och som spänns upp av vektorerna

$$(0,1,2), (1,2,4), (2,3,4)$$

22. Beräkna determinanterna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

23. Beräkna för alla reella tal a och b värdet av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2 & 1 & b \end{vmatrix}$$

Ortogonalitet

24. Finn den ortogonala projektionen av vektorn $(1,2,3)$ på linjen $x = y = z$.

25. Finn en ortogonal bas i planet $x+y+z=0$.

26. Finn matrisen för den ortogonala projektionen i planet $x+y+z=0$.

Svar

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(1, -3, 1, 0) + s(-3, 4, 0, 1), s, t \in \mathbb{R}$

2. $a = 2, b_2 - 2b_1 = 0$

3. (a) gäller då och endast då $p \neq 3/2$
   (b) gäller då och endast då $p = q = 3/2$
   (c) gäller då och endast då $p = 3/2$, $q \neq 3/2$

4. $p \neq 3$

5. Lös systemet $x_1 v_1 + \cdots x_4 v_4 = 0$ där $v_1, \ldots, v_4$ är de givna vektorerna.

6. Valmöjligheterna är oändliga. Tex duger u_1,u_2 och $u_3 = (1, 0, -1)$ eftersom u_3 är vinkelrät mot både u_1 och u_2.

7. Rangen är 2. Nollrummets dimension är också 2.

8. Bas för kolonnrummet : $(1, 2), (2, 1)$.
   Bas för nollrummet : $(-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$.

9. $\mathbf{u} = t(1, 0, -1), t \in \mathbb{R}$

10. Nollrummet har dimensionen 3. Informationen är otillräcklig

11. (a) Bilden av $\mathbf{u}$ är $(0, 5, 0)$.
    (b) $(4.6, -4.4, -3.2)$ avbildas på $\mathbf{u}$.

12. Bilden är en parallellogram med hörn i $(0, 0), (6, 21), (8, 29), (2, 8)$.

13. Matrisen för T_n är

$$\begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

14.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{resp.} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man får alltså inte samma matris om man byter ordning mellan operationerna!

15. T är injektiv, surjektiv och (således) bijektiv.

16. Värdemängden är $\{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

17. (a) Nej! (Det är bara kvadratiska matriser som kan vara inverterbara!)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ är (givetvis) inverterbar.}$$

(b) Nej, som sagt!

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -8 & -7 & -6 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ är inte inverterbar.}$$

(c)

$$AA^T = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \text{ är inverterbar.}$$

(d)

$$A^TA = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \text{ är inte inverterbar.}$$

18.

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

19. Ja, matrisen är invers till

$$\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Endast (a) är sann!

21. Volymen är 2.

22. Determinanterna värden är -12 resp. -160.

23. Värdet är $a-2$, oberoende av b.

24. $(2, 2, 2)$

25. Det finns många svar. En ortogonal bas är $(1, -1, 0), (1, 1, -2)$.

26. Sammamatris som i uppgift 16, alltså

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ?$$