Svar till vissa uppgifter ur Lorenzo Saduns bok
VARNING: Risken är stor att enstaka fel insmugit sig, särskilt som svaren skrevs ner efter kursens slut!

Kapitel 2

2.1.3: Ej vektorrum
2.1.5: Vektorrum
2.1.7: Vektorrum
2.1.8: Vektorrum
2.1.9: Ej vektorrum

2.2.4: Linjärt oberoende, ej bas
2.2.5: Linjärt beroende
2.2.6: Spänner upp, ej bas
2.2.7: Bas

2.3.6: Bas
2.3.7: Bas
2.3.8: Bas
2.3.9: Linjärt oberoende, ej bas
2.3.10: $\dim(V) = 3$. Bas: $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

2.4.3: $P_{\mathcal{E}B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{\mathcal{B}E} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\frac{9}{4}, \frac{1}{4})^T$
2.4.5: $P_{\mathcal{E}B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{\mathcal{B}E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (10, 2, -9)^T$
2.4.7: $P_{\mathcal{E}B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{\mathcal{B}E} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})^T$
2.4.9: Samma svar som 2.4.5
2.4.11: Samma svar som 2.4.7 om $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (tryckfel i boken, kan man anta).

2.5.3: Underrummet av alla symmetriska matriser har dimensionen 6.
Underrrummet av alla antisymmetriska matriser har dimensionen 3.
2.5.4: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Kapitel 3

3.1.3: Visa att $I(f+g) = I(f) + I(g)$ och $I(cf) = cI(f)$
3.1.5: $L((3,5)^T) = (8,13)^T$
3.1.6: Matris $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

3.1.13: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

3.2.3: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.2.7: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2.8: T_a har matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $T_a^{-1} = T_{-a}$.

3.2.9: Om $n = 3$ har T_a matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^3 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2.11: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 30 \end{pmatrix}$

3.3.1: $[L]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.3.3: $[\frac{d}{dt}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3.3.5: $[T_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.3.7: $P_{\mathcal{B}D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [L]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.4.1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix}$

3.4.4: $[L_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/3 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix}$, $[\frac{d}{dt}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}$

3.5.1: Bas för kärnan (nollrummet): $\{(1,-2,1,0)^T,(2,-3,0,1)^T\}$
Bas för värdemängden (kolonnrummet): $\{(1,2,3)^T,(2,3,4)^T\}$

3.5.5: Kärnan består av alla antisymmetriska matriser, dvs alla matriser av formen $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$
Värdemängden består av alla symmetriska matriser $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$. Rangen är 3.

3.5.6: Kärnan består av alla antisymmetriska $n \times n-$matriser,
värdemängden av alla symmetriska $n \times n-$matriser. Rangen är $n(n+1)/2$.

Kapitel 4

4.1.2: Egenvektor $(1,1)^T$
4.1.3: Bas för E_2: $(1,1,1)^T$. Bas för E_{-1}: $\{(-1,1,0)^T,(-1,0,1)^T\}$ (exempelvis)
4.1.4: Bas för E_0: $\{1,x\}$
4.1.5: Bas för E_0: $\{1,e^{-x}\}$. Bas för E_2: $\{e^x,e^{-2x}\}$.
4.1.6: Bas för E_1: $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$
Bas för E_{-1}: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
4.1.7: Bas för E_2: $\{1,t^2\}$

4.2.1: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$
4.2.4: $A^5\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 - 4\cdot 2^5\mathbf{b}_2 + 3\cdot 3^5\mathbf{b}_3$
4.2.5: $A^{10}\mathbf{e}_2 = -2^{10}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$
4.2.6: Observera att $(A-\lambda_j I)\mathbf{b}_j = \mathbf{0}$

4.3.3: $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$, egenvärden $0,3$.
Bas av egenvektorer: $\{(-2,1)^T,(1,1)^T\}$
4.3.4: $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 25$, egenvärden ± 5.
Bas av egenvektorer: $\{(2,1)^T,(-1,2)^T\}$
4.3.5: $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 1$, egenvärden $(1\pm\sqrt{5})/2$.
Bas av egenvektorer: $(-1,(1\pm\sqrt{5})/2)^T\}$
4.3.6: $P_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$, egenvärden $0,1,-1$.
Bas av egenvektorer: $\{(0,1,0)^T,(1,0,1)^T,(1,0,-1)^T\}$
4.3.7: $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 14\lambda^2$, egenvärden $0,0,14$.
Bas av egenvektorer: $\{(-2,1,0)^T,(1,1,-1)^T,(-1,-2,3)^T\}$

4.3.8: $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda)$, egenvärden $0, 2, 3$.
Bas av egenvektorer: $\{(1, -2, 1)^T, (-1, 0, 1)^T, (1, 1, 1)^T\}$

4.3.9: Egenvärden $0, 0$, men alla egenvektorer är parallella med $(1, 0)^T$

4.3.10: Egenvärden $1, 3, 9$, bas av egenpolynom: $1, t, t^2$

4.3.11: Egenvärden $1, 1, -1$, egenpolynom $1, -t + t^2, -1 + 2t$

4.3.12: Egenvärden $1, \alpha_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \alpha_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$
Egenplynom $1 + t - t^2, (\alpha_1 - 4)t + 2t^2, (\alpha_2 - 4)t + 2t^2$

4.3.14: Använd **4.2**.6

4.4.2: Matris $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,
egenvärden $\cos\theta \pm i\sin\theta$, egenvektorer $(\mp i, 1)^T$.

4.4.3: Avbildningen L innebär rotation vinkeln $-2\pi/3$ runt axeln med riktning $(1, 1, 1)$.
Egenvärden $1, \alpha_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \alpha_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$,
egenvektorer $(1, 1, 1)^T$, $(1, \alpha_1, \alpha_1^2)^T$, $(1, \alpha_2, \alpha_2^2)^T$

4.4.4: Matrisen är $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-2\pi/3) & -\sin(-2\pi/3) \\ 0 & \sin(-2\pi/3) & \cos(-2\pi/3) \end{pmatrix}$

4.4.5: Egenvärden $1 \pm 2i$, egenvektorer $(1 \pm 2i, 1)^T$

4.4.6: Egenvärden $3 \pm 2i$, egenvektorer $(\mp 2i, 1)^T$
$[L]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

4.4.10: Egenvärden $0, \pm i\sqrt{3}$, egenvektorer $(1, -1, 1)^T, (\pm i\sqrt{3} + 1, \pm i\sqrt{3} - 1, -2)^T$

4.5.3: Egenvärde 2, algebraisk multiplicitet $m_a(2) = 2$,
geometrisk multiplicitet $m_g(2) = 1$, ej diagonaliserbar.

4.5.5: Egenvärden $3, 1$, $m_g(3) = m_a(3) = 1$, $m_g(1) = m_a(1) = 1$, diagonaliserbar

4.5.7: Egenvärden $4, 2$, $m_g(4) = m_a(4) = 2$, $m_g(2) = m_a(2) = 1$, diagonaliserbar

4.5.9: Egenvärde 4, $m_a(4) = 3$, $m_g(4) = 1$, ej diagonaliserbar

4.6.2: ± 6

4.6.5: 1000 ± 6

4.6.6: $0, 0, 3$

4.6.11: Egenvärden $2, -1, 0, 1$.
Egenvektorer $(2, 1, 0, 0)^T, (1, -1, 0, 0)^T, (-11, 3, 1, 2)^T, (-17, -3, 2, 2)^T$

4.7.3: A har egenvärdena $3, 2, 1$, B har egenvärdena $5, 1, -1$.
Motsvarande egenvektorer $(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (-3, -1, 1)^T$

4.7.5: A har egenvärdena $0, 1$, B har egenvärdena $1, e$.
Motsvarande egenvektorer $(-2, 1)^T, (1, -1)^T$

4.7.6: A, B kan inte diagonaliseras samtidigt ($AB \neq BA$)

4.8.6: $e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$

4.8.8: $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kapitel 5

5.1.3: $\mathbf{x}(n) = (3\cos(n\theta) - 4\sin(n\theta), 3\sin(n\theta) + 4\cos(n\theta))^T$ med $\theta = \pi/4$.
5.1.4: $\mathbf{x}(n) = (5^n + 2^{n+1}, 5^n - 2^n, 5^n - 2^n)^T$
5.1.5: $\mathbf{x}(n) \to (2/7, 3/7, 2/7)^T$
5.1.8: $D(n) = 20 \cdot 2^n + 5 \cdot (-0.5)^n$, $G(n) = 10 \cdot 2^n - 10 \cdot (-0.5)^n$, $D(n)/G(n) \to 2$
5.1.9: 69.2 resp. 115.4
5.1.10: 137.5 resp. 247.1

5.2.2: $\mathbf{x}(t) = (\cos(2t), -\sin(2t))^T$ om $\mathbf{x}(0) = (1,0)^T$
$\mathbf{x}(t) = (\sin(2t), \cos(2t))^T$ om $\mathbf{x}(0) = (0,1)^T$
5.2.3: $\mathbf{x}(t) = (\cos(2t), -0.5\sin(2t))^T$ om $\mathbf{x}(0) = (1,0)^T$
$\mathbf{x}(t) = (2\sin(2t), \cos(2t))^T$ om $\mathbf{x}(0) = (0,1)^T$
5.2.4: $\mathbf{x}(t) \to (2/7, 3/7, 2/7)^T$
5.2.6: I fallet $r_2 > r_1$ antar x_2 sitt största värde vid tiden $t = (\ln(r_2) - \ln(r_1))/(r_2 - r_1)$.

5.3.1: $\mathbf{x}(t) = (c_1 e^{t\sqrt{2}} + c_2 e^{-t\sqrt{2}})(1,1)^T + (c_3\cos(t\sqrt{2}) + c_4\sin(t\sqrt{2}))(-1,1)^T$
$c_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}},\ c_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}},\ c_3 = -\frac{1}{2},\ c_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
5.3.2: $\mathbf{x}(t) = (c_1 e^{t\sqrt{2}} + c_2 e^{-t\sqrt{2}})(2,1)^T + (c_3\cos(t\sqrt{2}) + c_4\sin(t\sqrt{2}))(-2,1)^T$
$c_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{8},\ c_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{8},\ c_3 = -\frac{1}{4},\ c_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

5.4.1: $\mathbf{x}(n) = (2^n - (-1)^n)/3$

5.5.1: Instabilt, men om $\mathbf{x}(0)$ är parallell med $(-1-\sqrt{5}, 2)^T$ så konvergerar $\mathbf{x}(n)$ mot $\mathbf{0}$.
5.5.2: Instabilt, $\mathbf{x}(n)$ är obegränsad utom om $\mathbf{x}(0)$ är parallell med $(-2,1)^T$.
5.5.3: Instabilt.
5.5.4: Instabilt.
5.5.5: Neutralt stabilt.
5.5.7: Stabilt om $-1 < k < 0$, neutralt stabilt om $k = 0$ eller $k = -1$.
Instabilt om $k < -1$ eller $k > 0$.
5.5.8: Räkna ut egenvärdena!

5.6.1-4: $\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \mathbf{x}(n-1)$
$\mathbf{x}(n) \to (3,6)^T$ oberoende av startvärde.
5.6.5: I längden vinner laget 2 matcher av 3.
5.6.6: I längden vinner laget 9 matcher av 17.
5.6.7: Jämviktstillstånd $(21/46, 12/46, 13/46)^T$.
Det näst största egenvärdet är $0.3 + \sqrt{0.03} \approx 0.47$.
5.6.8: Jämviktstillstånd $(1/3, 1/3, 1/3)^T$. Två egenvärden har belopp 0.7, ett är lika med 1.

Kapitel 6

6.1.4: $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 24$
6.1.5: $\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = -14$
6.1.6: $\langle \mathbf{p}|\mathbf{q}\rangle = 71/20$

6.2.3: $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = 2, |\mathbf{x}| = \sqrt{2}$
6.2.4: $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 9, \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle = 9, |\mathbf{x}| = \sqrt{8}, |\mathbf{y}| = 4$
6.2.5: $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = -7i, \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle = 7i, |\mathbf{x}| = \sqrt{3}, |\mathbf{y}| = \sqrt{59}$
6.2.6: $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 13-i, \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle = 13+i, |\mathbf{x}| = \sqrt{14}, |\mathbf{y}| = \sqrt{5}$

6.3.1: $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 18$
6.3.2: $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 52$
6.3.3: $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 18$
6.3.4: $\langle \mathbf{x}| = (1, -2i, 3-i), \quad |\mathbf{x}\rangle = (1, 2i, 3+i)^T, \quad \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 14 - 13i$

6.4.1: $\mathbf{x} = 2(1,1,1)^T + 2.5(-2,1,1)^T + 2.5(0,1,-1)^T$
6.4.2: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6.5.1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
6.5.2: $P_{\mathbf{v}_1}$ har matrisen $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$P_{\mathbf{v}_2}$ har matrisen $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
6.5.3: $P_{\mathbf{v}_1}$ har matrisen $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
$P_{\mathbf{v}_2}$ har matrisen $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
6.5.5: $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,1)^T$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{198}}(-5,2,13)^T$, $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}(-1,4,-1)^T$
6.5.6: Om man tar vektorerna i ordning $(4,0,2,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$, $(1,2,3,4)^T$ ger Gram-Schmidt
$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1,0)^T$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{55}}(-1,5,2,5)^T$, $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{330}}(-4,-13,8,9)^T$
6.5.7: $(0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T, (1/\sqrt{2})(1,1,0,0)^T$
Detta är inte var Gram-Schmidts metod ger!
6.5.8: $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}(1+i, 1-i, 1)^T$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{280}}(1-9i, 3+11i, 8-2i)^T$
6.5.10: Ortogonal bas (ej normerad):
$b_1(t) = 1, b_2(t) = \cos(2t), b_3(t) = \sin(t) - \frac{2}{\pi} + \frac{8}{3\pi}\cos(2t)$
6.5.11: Ortogonal bas (ej normerad):
$b_1(t) = 1, b_2(t) = t, b_3(t) = 3t^2 - 1, b_4(t) = 5t^3 - 3t$

6.6.1: $P_W\mathbf{x} = 2(0,1,-1)^T$
6.6.2: $(1,1,1,1)^T = 0.4(3,1,-1,3)^T + 0.2(-1,3,-3,1)^T$
6.6.3: $P_W(t^2) = t - 1/6$

6.7.2: Minsta kvadratlösning $(-\frac{236}{12}, \frac{197}{12})^T$, (den enda).
6.7.3: Minsta kvadratlösningar $\frac{1}{12}(-76,67,0)^T + t(12,-13,2)^T, t \in \mathbb{R}$.

Kapitel 7

7.1.2: $L^\dagger(\mathbf{x}) = (3x_1 + 5x_3, x_1 + x_2, -x_2 + x_3)^T$
7.1.3: $L^\dagger(\mathbf{x}) = (3x_1 + (1-i)x_3, -ix_1 - ix_2, -2x_2 + 5x_3)^T$
7.1.4: Om $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T G\mathbf{y}$ så är $L^\dagger(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ med $B = G^{-1}A^TG$.
7.1.5: $L^\dagger(\mathbf{x}) = (3x_1 + 15x_3, \frac{1}{2}x_1 + x_2, -\frac{2}{3}x_2 + x_3)^T$

7.2.1: $\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1-i)^T$
7.2.2: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$
7.2.3: $(0,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-i)^T$
7.2.4: $\frac{1}{5}(4,0,-3)^T$, $\frac{1}{5\sqrt{2}}(3,\pm 5,4)^T$,
7.2.5: Visa att om $\mathbf{v}$ är en normerad enhetsvektor med egenvärdet λ till $H = A^\dagger A$ så är $\lambda = |A\mathbf{v}|^2$.

7.3.2: I lämpligt koordinatsystem är kurvan $7y_1^2 + 2y_2^2 = 1$
7.3.3: Ellips, hyperbel eller två parallella linjer.
7.3.4: Se föregående uppgift.
7.3.7: Maximum 3, antas i $(0,0,1)^T$. Minimum 1, antas i $(1,0,0)^T$.
7.3.8: Maximum $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, antas i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})^T$
Minimum $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, antas i $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})^T$
7.3.9: Maximum är $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, (det inverterade värdet av det minsta egenvärdet).

7.4.6: Egenvärden $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, egenvektorer $((\pm\sqrt{3}+1)i, -1+i)^T$
7.4.7: Rotationsaxel $\mathbf{a} = (1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1)^T$.
Rotationsvinkeln θ ges av att $\cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{8}}(-1 - \sqrt{2} + i\sqrt{5 - 2\sqrt{2}})^T$.