

1. Låt (M, d) vara ett metriskt rum och $E \subseteq M$.

a) Definiera begreppen *inre punkt i E*, *isolerad punkt i E* samt *hopningspunkt till E*.

b) Beskriv begreppen ovan i fallen då

i. $E = \{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{Z}_+ \}, M = \mathbb{R}.$

ii. $E = \{ (x, \sin \frac{1}{x}) ; x \neq 0 \}, M = \mathbb{R}^2.$

Du behöver inte skriva fullständiga motiveringar men det bör framgå, t.ex. av figurer, hur du har tänkt.

(3p)

2. a) Definiera begreppet *kompakt mängd*.

b) Visa att $f(K)$ är kompakt om f är en kontinuerlig funktion på ett kompakt metriskt rum K , in i ett metriskt rum M .

(3p)

3. a) Definiera begreppet *likformig konvergens*.

b) Visa att om $\{f_n\}$ är en följd av kontinuerliga funktioner på E och om $f_n \rightarrow f$ likformigt på E så är f kontinuerlig på E .

(4p)

4. Låt $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, där E är en öppen mängd i $\mathbb{R}^n$. Visa att f är differentierbar på E om de partiella derivatorna $D_j f$ existerar och är kontinuerliga på E för $j = 1, \dots, n$.

(3p)

5. Visa att sammansättningen $g \circ f$ är likformigt kontinuerlig på X om $f : X \rightarrow Y$ och $g : Y \rightarrow Z$ är likformigt kontinuerliga på X respektive Y .

(3p)

6. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{cases}$$

definierar (x, y, u) som en funktion av z i en omgivning av punkten $(0, 0, 0, 0)$.

Visa även att det inte finns någon omgivning till $(0, 0, 0, 0)$ där (x, y, z)

kan lösas ut som en funktion av u .

(3p)

7. Låt A och B vara separerade mängder i $\mathbb{R}^n$ och antag att $\mathbf{a} \in A$ och $\mathbf{b} \in B$. Definiera funktionen $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ genom $p(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Sätt $A_o = p^{-1}(A)$ och $B_o = p^{-1}(B)$. Visa att A_o och B_o är separerade i $\mathbb{R}$. (3p)
8. Ett metriskt rum sägs vara *separabelt* om det har en uppräknelig tät delmängd. Visa att $\mathcal{C}([0, 1])$ är separabelt. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 12.30-13.00 i mottagningsrummet. Tentamensresultat kan också fås per telefon 031-7723509, före kl 14. Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 20 juni - skulle den vara klar tidigare meddelar jag det på kurshemsidan.