

1. a) Definiera begreppen *öppen mängd*, *sluten mängd* respektive *kompakt mängd*.
b) Visa att kompakta mängder är slutna. (4p)
2. a) Definiera begreppet *differentierbar i en punkt*.
b) Visa att om f är differentierbar i $\mathbf{x}$, så är $f'(\mathbf{x})$ entydigt bestämd. (3p)
3. a) Låt f vara en funktion från ett metriskt rum X in i ett metriskt rum Y . Definiera vad som menas med att f är *likformigt kontinuerlig* på X .
b) Ge exempel på reellvärda funktioner f och g som är likformigt kontinuerliga på $\mathbb{R}$, men där produkten fg inte är likformigt kontinuerlig på $\mathbb{R}$. (3p)
4. Visa att det till en given reellvärd kontinuerlig funktion f på $[0, 1]$, med $f(0) = f(1) = 0$, finns en följd av polynom som konvergerar likformigt mot f på $[0, 1]$. (3p)
5. Låt f vara en kontinuerlig funktion från ett metriskt rum X in i ett metriskt rum Y , och låt E vara en tät delmängd av X . Visa att $f(E)$ är tät i $f(X)$. (3p)
6. Visa att ekvationssystemet
$$\begin{cases} e^x \ln y + uvz &= y + 5 \\ x^2v + vy &= z + 1 \end{cases}$$
definierar (u, v) som en funktion g av (x, y, z) i en omgivning av punkten $(u, v, x, y, z) = (1, 3, 0, 1, 2)$. Bestäm den linjära approximationen av g vid $(0, 1, 2)$. (3p)
7. Antag att M är ett metriskt rum i vilket varje Cauchyföljd har en konvergent delföljd. Visa att M är fullständigt. (3p)

8. Låt μ och ν vara givna reellvärda kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$ och antag att

$$\int_0^1 |\mu(t)| dt < 1 .$$

Visa att det finns någon funktion $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ sådan att

$$f(x) = \nu(x) + \int_0^x f(t) \mu(t) dt \quad \text{för alla } x \in [0, 1] . \quad (3p)$$

Lycka till!
Ulla Dinger

Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 12.30-13.00 i mottagningsrummet. Tentamensresultat kan också fås per telefon 031-7723509, före kl 14. Denna skrivning beräknas vara färdiggrättad den 15 september.