

1. Låt (M, d) vara ett metriskt rum och $E \subseteq M$.

- a) Definiera begreppen *inre punkt* i och *hopningspunkt till* E .
- b) Definiera begreppen *öppen* respektive *sluten mängd* i M .
- c) Låt $M = \mathcal{C}([0, 1])$, mängden av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$ försedd med supremumnormen, och låt

$$E = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : f(x) \geq 0 \text{ för alla } x \in [0, 1]\}.$$

Visa att E är sluten. (4p)

2. Låt f vara en funktion från ett metriskt rum X in i ett metriskt rum Y .

- a) Definiera vad som menas med att f är *likformigt kontinuerlig* på X .
- b) Visa att, om f är kontinuerlig på X och X är kompakt så är f likformigt kontinuerlig på X . (3p)

3. a) Definiera begreppet *likformig konvergens*.

- b) Undersök om funktionsföljden

$$f_n(x) = x \sqrt[n]{x}$$

konvergerar likformigt på $]0, \infty[$. (3p)

4. Definiera $\|A\| = \sup\{|Ax| ; x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$, för $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

- a) Visa att detta definierar en *norm* på $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
- b) Låt $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vara definierad av $A(x, y) = (3x, y)$. Beräkna $\|A\|$. (4p)

5. Visa att $\{x \sin^2(1/x); x \neq 0\} \cup \{0\}$ är en sammanhängande mängd i $\mathbb{R}$. (2p)

6. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} xe^y + uz - \cos v &= 2 \\ u \cos y + x^2v - yz^2 &= 1 \end{cases}$$

definierar (u, v) som en funktion g av (x, y, z) i en omgivning av punkten $(u, v, x, y, z) = (1, 0, 2, 0, 1)$. Bestäm den linjära approximationen av g vid $(2, 0, 1)$. (3p)

7. Låt f_n vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot en funktion f på en mängd E . Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$$

för varje följd (x_n) i E sådan att $x_n \rightarrow x$, och $x \in E$. (3p)

8. Låt $A_1, \dots, A_n$ vara icke-tomma, parvis disjunkta, slutna delmängder i ett metriskt rum M . Visa att det finns en reellvärd kontinuerlig funktion, f , på M sådan att $f(x) = j$ för alla $x \in A_j$.

Avgör om resultatet kan generaliseras till uppräknligt många mängder $A_1, A_2, A_3, \dots$. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Lösningar kommer att anslås på anslagstavla i hus MV:F. Denna skrivning beräknas vara färdigriktad den 28 juni - skulle den vara klar tidigare så meddelar jag det på hemsidan. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen. Tentamensresultat kan också fås per telefon 031-7723500.

Det kommer inte att ske någon gemensam granskning av tentan, men om du vill diskutera tentan/rättningen med mig är du välkommen att kontakta mig. Observera att du inte ska ta med dig tentan från expeditionen om du tycker att poängsättningen är felaktig.