

1. a) Definiera begreppen *uppräknelig mängd* och *överuppräknelig mängd*.
b) Visa att $\mathbb{R}$ är överuppräknelig. (3p)
2. a) Definiera vad som menas med att ett metriskt rum är *kompakt* respektive *fullständigt*.
b) Ge exempel (utan motivering) på ett fullständigt metriskt rum som inte är kompakt.
c) Visa att varje kompakt metriskt rum är fullständigt. (4p)
3. a) Definiera begreppet *kontraktion*.
b) Låt (M, d) vara ett fullständigt metriskt rum och låt $\phi : M \rightarrow M$ vara en kontraktion. Visa att ϕ har en entydigt bestämd fixpunkt. (3p)
4. Visa att det till en given reellvärd kontinuerlig funktion f på $[0, 1]$, med $f(0) = f(1) = 0$, finns en följd av polynom som konvergerar likformigt mot f på $[0, 1]$. (3p)
5. Avgör för vilka $a \geq 0$ som följderna $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ konvergerar likformigt på $[a, \infty[$. (3p)
6. Låt $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Visa att f är lokalt inverterbar vid varje punkt $(x, y) \neq (0, 0)$, men inte vid $(0, 0)$. Låt g beteckna den lokala inversen till f vid $(2, 1)$ och bestäm den linjära approximationen av g vid $f(2, 1)$. (3p)
7. Låt $T : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad av

$$Tf = \min_{x \in [0, 1]} f(x).$$

Visa att T är likformigt kontinuerlig på $\mathcal{C}([0, 1])$, mängden av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$ försedd med supremumnormen. (3p)

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

Tentamensskrivning i Reell analys, MAM410.
Tid: 2006-08-23, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Jonatan Vasilis tel 076 272 18 61

8. Visa att varje öppen sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$ är bågvis sammanhängande. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Lösningar kommer att anslås på anslagstavla i hus MV:F. Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 13 september. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen. Tentamensresultat kan också fås per telefon 031-7723500.

Det kommer inte att ske någon gemensam granskning av tentan, men om du vill diskutera tentan/rättningen med mig är du välkommen att kontakta mig. Observera att du inte ska ta med dig tentan från expeditionen om du tycker att poängsättningen är felaktig.