

1. Låt $f : V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning av ett linjärt rum V över en kropp K och låt $U \subseteq U'$ vara två delrum till V . Visa att

$$\dim f(U') - \dim f(U) \leq \dim U' - \dim U.$$

2. Betrakta $A = \mathbb{Z}[X]$ och $B = \mathbb{Z}_5$ som $\mathbb{Z}$ -algebror och låt $f : A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ vara den naturliga homomorfismen $f(a) = a \otimes 1$. Vad är kärnan till f ? Ge en enkel beskrivning av $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.
3. Låt $f : V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning av ett unitärt rum över $\mathbb{C}$. Låt f^* vara den adjungerade avbildningen till f dvs $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ för godtyckliga $x, y \in V$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ är skalärprodukten på V). Visa att
- (a) $f_1 = \frac{1}{2}(f + f^*)$ och $f_2 = -\frac{i}{2}(f - f^*)$ är hermitska avbildningar,
- (b) framställningen $f = f_1 + if_2$ med helt godtyckliga hermitska avbildningar $f_1 : V \rightarrow V$ och $f_2 : V \rightarrow V$ är entydig.
4. En linjär avbildning av ett vektorrum över de komplexa talen $\mathbb{C}$ har elementära delare $x^3, x, (x-1)^2, x+1$. Bestäm invarianta faktorer, minimalpolynomet och Jordans normalform för denna avbildning.
5. Låt G vara en ändlig grupp. Låt V vara en $\mathbb{C}[G]$ -modul, där V har ändlig dimension över $\mathbb{C}$. Låt $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ vara det duala rummet till V .
- (a) Motivera att V^* är en $\mathbb{C}[G]$ -modul om $(gf)(v) = f(g^{-1}v)$ för $g \in G$ och $v \in V$.
- (b) Låt χ vara karaktären av den representation av G som definieras av V . Bestäm karaktären av den representation av G som definieras av V^* .
6. Uppgifterna 6 – 8 kommer att handla om teori-frågor: formuleringar av alla viktiga definitioner och satser samt några av följande bevis: (3.18), (3.20), (3.23), (3.24), (4.7), (4.20), (4.22), (5.25), (5.26), (5.28), (6.9), (6.13), (6.20), (8.1)(a), (8.8)(existensen), (8.11), (8.20), (8.24), (9.15), (9.16), (9.17), (9.18), (9.19), (9.27), (9.33), (9.36), (9.37), (9.43).

7.

8.

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 8p på uppgifterna 1 – 5 och minst 5p på uppgifterna 6 – 8. För väl godkänd krävs minst 20p. Bonuspoäng kan tillgodoräknas på uppgifterna 1 – 5.

Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den x november. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon fr o m den x november: tel. 772 3509 efter kl. 14.00.