

1. Låt $f : V \rightarrow V$ och $g : V \rightarrow V$ vara linjära avbildningar av ett linjärt rum V av ändlig dimension över en kropp K . Visa att

$$\dim gf(V) \geq \dim f(V) + \dim g(V) - \dim V.$$

2. Låt V vara ett vektorrum av ändlig dimension över en kropp K och V_1, V_2 två delrum till V sådana att $V = V_1 \oplus V_2$ (dvs varje $v \in V$ kan skrivas entydigt som summa: $v = v_1 + v_2$, där $v_i \in V_i$). Visa att detta villkor är ekvivalent med att $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$ och $V_1 \cap V_2 = 0$.
3. Låt V och W vara fria moduler över en ring R (kommutativ och associativ). Motivera att det finns en R -homomorfism $\varphi : V^* \otimes_R W \rightarrow \text{Hom}_R(V, W)$ sådan att $\varphi(f \otimes w)(v) = f(v)w$, då $f \in V^* = \text{Hom}_R(V, R)$, $v \in V$ och $w \in W$. Motivera att φ är en isomorfism om V och W har ändlig rang.
4. Bestäm Jordans normalform av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

och motivera att matrisen A är nilpotent (dvs $A^n = 0$ för något n).

5. Låt G vara en ändlig grupp och H dess delgrupp. Visa att om för två godtyckliga olika irreducibla representationer $T_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ och $T_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ är restriktionerna av T_1 och T_2 till H olika och irreducibla så är $H = G$.
6. Låt V vara ett linjärt rum av dimension n över en kropp K . Visa att $\dim_K \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$.
7. Låt V vara ett vektorrum över de komplexa talen $\mathbb{C}$ och $T : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ en hermitsk form. Visa att det finns en bas för V som är ortogonal med avseende på T .
8. Formulera och bevisa Schurs Lemma om irreducibla grupprepresentationer av ändliga grupper.

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 8p på uppgifterna 1 – 5 och minst 5p på uppgifterna 6 – 8. För väl godkänd krävs minst 20p. Bonuspoäng kan tillgodoräknas på uppgifterna 1 – 5 (dock ej för VG).

Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 15 januari. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon fr o m den 15 januari: tel. 772 3593.