

Tentamensskrivning i Naturvetarmatematik, MAN110

1. Vi söker först en partikulärlösning i formen $y(x) = Ax + B$ (eftersom en förstegrad polinom står i höger leden). Vi har $y'(x) = A$, $y''(x) = 0$, alltså $y'' + 4y' + 5y = x = 5Ax + 5B + 4A$. Vi löser systemet och får $y_p(x) = x/5 - 4/25$. (Ett typisk fel: y_p söks i formen Ax).

Nu letar vi efter lösningen till homogena ekvationen $y'' + 4y' + 5y = 0$. Vi skriver karakteristiska ekvationer $k^2 + 4k + 5 = 0$. Ekvationen har rötter $k_{1,2} = -2 \pm i$. Så blir allmänna lösningen $y_h = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$ med godtyckliga konstanter C_1, C_2 . Ny för inhomogena ekvationen blir allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + x/5 - 4/25.$$

Ny letar vi efter konstanter C_1, C_2 sådana att begynnelsevilkoren uppfylls. Vi sätter in $x = 0$ i lösningen och får $y(0) = 1 = C_1 + C_2 - 4/25$. Sätter in $x = 0$ i uttryck till derivatan av lösningen och får $y'(0) = -1 = -2C_1 + C_2 + 1/5$. Löser systemet och får $C_1 = 29/25, C_2 = 28/25$

2. (a) $a = 1, b = 2$; använder l'Hospital, får $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x(2 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2 - \cos x + x \sin x} = \frac{0}{1} = 0$.
- (b) $a = 1, b = 1$. Använder l'Hospital 3 gånger, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \cos x + x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3 \cos x - x \sin x} = -\frac{1}{3}$.
- (c) $a = 2, b = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 2x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 2}{1 - \cos x + x \sin x}$. Här går täljaren mot -1 , nämnaren mot 0 . Gränsvärdet finns inte (mer exakt, $-\infty$). Typiska fel: fel i derivator, i (iii) försöker använda l'Hospital många gånger till.
3. (a) En separabel ekvation. Separerar, får $y^{-3} dy = -7x dx$. Integrerar: $-y^{-2}/2 = -7/2 x^2 + C$, $y = \pm \sqrt{\frac{1}{7x^2 - 2C}}$. Värdet till C söker ifrån villkoret $y(1) = 1$, sätter in i formeln, får tecken plus och $C = 3$; $y = \sqrt{\frac{1}{7x^2 - 6}}$. Typiska felet: att försöka att lösa som en linjär ekvation.
- (b) En homogen ekvation: högerleden beror på kvoten $\frac{y}{x}$. Tar $z = \frac{y}{x}$ som en ny okänd funktion. Sätter in i ekvationen, får en separabel ekvation, $\cos z dz = \frac{dx}{x}$. Integrerar: $\sin z = \ln |x| + C$, $z = \arcsin(\ln |x| + C)$, $y = x \arcsin(\ln |x| + C)$. C hittar ifrån $y(1) = 1$, $1 = 1 \arcsin(\ln 1 + C)$, $\arcsin C = 1$, $C = \pi/2$.
4. (a) Gör variabelbytet $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$, $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int_1^0 \frac{1}{1 + t^2} dt = -\arctan t \Big|_1^0 = \pi/4$.
- (b) Partiellintegrering: $x^2 = (\frac{x^3}{3})'$. $\int_1^3 x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 dx = 9 \ln 3 - 26/9$.
5. Hittar först kritiska punkter. $f'(x) = e^{-x^2}(-2x^3 + 8x)$, $f'(x) = 0$ för $x = -2; x = 0, x = 2$. På intervallet $[0, 3]$ måste man jämföra värden i punkter $0, 2, 3$. $f(0) = -3, f(2) = e^{-4}, f(3) = \frac{6}{e^9}$. Av dem $f(0) = -3$ är det minsta, $f(2) = e^{-4}$ är det största. På $[-2, \infty)$ jämför man $f(-2), f(0), f(2)$ och gränsvärdet i $+\infty$, det sista är lika med 0 . $f(0) = -3$ är det minsta, $f(2) = e^{-4} = f(-2)$ är de största värden.
6. Vi gissar en rot, provar $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Väldigt snabbt hittar en rot $x_1 = 1$. Delar polynomen med $x - 1$ och hittar två rötter till, $x_2 = 1, x = 3 = -6$. Faktoruppdelning har formen $p(x) = (x - 1)^2(x + 6)$. Partialbråkuppdelning av $\frac{x}{p(x)}$ har formen

$$\frac{x}{p(x)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 6}$$

Jämför koefficienter och hittar $A = \frac{1}{7}, B = \frac{6}{49}, C = -\frac{6}{49}$. Typiska felet: fel i formen av partialbråkuppdelning.

7. Vi skriver systemet i matrisformen $X' = AX$ med matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena, vi betraktar den karakteristiska ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 6 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Rötter till ekvationen är $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -4$. Därefter söker egenvektorer som lösnigar till systemet

$$\begin{array}{rcl} (2 - \lambda_j)p + 6q & = & 0 \\ p + (-3 - \lambda_j)q & = & 0 \end{array}.$$

Vi hittar egenvektorer $f_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Allmänna lösningen till systemet har formen $X(t) = C_1 f_1 e^{3t} + C_2 f_2 e^{-4t}$. C_1, C_2 hittar ifrån begynnelsevillkoren, får $C_1 = 0, C_2 = -1$.

8. Lösningförslag 1. Använder Gaussmetoden. Vi subtraherar från den tredje ekvationen den första. Vi kommer till

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 1 \\ 3y + pz & = & 2 \\ 6y + z & = & q - 1 \end{array}.$$

Nu subtraherar vi från tredje ekvationen den första multiplicerade med 2.

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 1 \\ 3y + pz & = & 2 \\ (1 - 2p)z & = & q - 4 \end{array}.$$

Zå kan man se att om $1 - 2p \neq 0, p \neq \frac{1}{2}$ så finns bara en lösning. Om $1 - 2p = 0, q - 4 = 0$, så finns oändligt många lösningar. Om $1 - 2p = 0, q - 4 \neq 0$, så finns inga lösningar.

Lösningförslag 2. Använder determinantkriteriet. Vi har

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & p \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3(1 - 2p).$$

Därför har systemet exakt en lösning om och endast om $p \neq \frac{1}{2}$. För $p = \frac{1}{2}$ beräknar vi

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ q & 8 & 4 \end{vmatrix} = -8(q - 4).$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 1 & q & 4 \end{vmatrix} = -(q - 4)/2.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & q \end{vmatrix} = 3(q - 4).$$

Regel säger att om $q = 4$, så har vi $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, och det finns oändligt många lösningar; om $q \neq 4$ så finns det inga lösningar.