

Tentamen i Matematik MAN110/MAN001

Funktionslära

1. Argumentera på vilka intervall som funktionen $f(x) = \arctan(\sqrt{x^2 - 1})$ är kontinuerlig. Funktionen är definierad för sådana x för vilka $x^2 - 1 \geq 0$ eller $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ funktionen är kontinuerlig på hela definitionsmängden eftersom den är en elementär funktion, bildad från baselementära funktioner med hjälp av tillåtna operationer.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1 + 1} \times \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1/2} \times 2x$$

På vilka intervall som funktionen f växer, minskar??

Alla faktorer i formeln för derivatan är positiva, utom den sista, x , så $f'(x) < 0, x < -1$, $f'(x) > 0, x > 1$, f minskar för $x \leq -1$, f växer för $x \geq 1$.

Ekvationen $f(x) = y$ har lösningen $y = \pm \sqrt{\tan y + 1}$. På hela definitionsmängden, både plus och minus tecken är möjliga, därför är funktionen ej inverterbar. På halv-axlarna, bara en tecken är möjlig - därför är funktionen inverterbar. På intervallet $[\sqrt{2}, \infty)$ finns inte några punkter där derivatan är lika med 0 eller försvinner. Därför det är bara ändpunkterna är misstänkta. Värdena är $f(\sqrt{2}) = \arctan(1) = \pi/4$, $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pi/2$. Jämför. det minsta värde är i punkten $\sqrt{2}$, det största värde saknas.

2.

$$\int_0^3 \frac{2x - 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx,$$

Vi gör partialbråksuppdelning i formen

$$\frac{2x - 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Jämför koefficienter och hittar: $A = -\frac{8}{5}$, $B = \frac{4}{5}$, $C = \frac{3}{5}$. Primitiva funktionen blir

$$\int \frac{2x - 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx = \int \frac{A}{2x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A}{2} \ln |2x + 1| + \frac{B}{2} \ln(x^2 + 1) + C \arctan x + Const.$$

$$\int_0^3 \frac{2x - 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx = \frac{A}{2} \ln 7 + \frac{B}{2} \ln 10 + C \arctan 3.$$

$$\int_0^1 e^x \tan(e^{x-1}) dx :$$

Vi tar $e^{(x-1)}$ som en ny variabel y , $e^x = e \times e^{(x-1)}$ så

$$\int_0^1 e^x \tan(e^{x-1}) dx = e \int_{1/e}^1 \tan y dy = e (-\ln |\cos y|) \Big|_{1/e}^1 = e(-\ln |\cos 1| + \ln |\cos 1/e|).$$

3. -

(a) $y' = 2xy + e^{x^2} \tan(x)$, $y(0) = 1$, Det är en linjär ekvation. Först löser vi den homogena ekvationen $v' = 2xv$. Lösningen är Ce^{x^2} . För inhomogena ekvationen söks lösningen som $y(x) = c(x)v(x)$. Sätter in i ekvationen, får för v ekvationen $v' = \tan x$, $v(x) = -\ln |\cos x| + C$, $y(x) = e^{x^2}(-\ln |\cos x| + C)$. Sätter $x = 0$, $e^{0^2}(-\ln |\cos 0| + C) = 1$, $C = 1$.

(b) $y' = (t^2 + 1)(y^2 + 1)$, $y(0) = 0$, Det är en separabel ekvation. Separerarar:

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = (t^2 + 1)dt,$$

integrerarar:

$$\arctan y(t) = \frac{1}{3}t^3 + t + C$$

$y = \tan(\frac{1}{3}t^3 + t + C)$, sätter $t = 0$, $y(0) = C$, $C = 0$.

(c) $y'' + 3y' + 2y = 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

En linjär ekvation med konstanta koefficienter. Karakteristiske ekvationen: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, rötter: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, allmänna lösningen $y_h(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$. För inhomogena ekvationen söker lösningen i formen $y_p(t) = At + B$, sätter in i ekvationen, jämför koefficienter, hittar: $y_p(t) = t - \frac{3}{2}$. Allmänna lösningen till inhomogena ekvationen:

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + t - \frac{3}{2}$$

För $t = 0$: $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{2}$, $y'(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t} + 1$, $y'(0) = -C_1 - 2C_2 + 1 = 1$, $C_1 = 3, C_2 = -\frac{3}{2}$.

16p

4. Lös ett system differentialekvationer $x'(t) = -x(t) + 5y(t)$, $y'(t) = 5x(t) - y(t)$, $x(1) = 1, y(1) = 0$.

Matrisen av systemet har egenvärden 4, -6 med egenvektorererna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allmänna lösningen:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

. Sätter $t = 1$: $C_1e^4 + C_2e^{-6} = 1, C_1e^4 - C_2e^{-6} = 0$, $C_1 = \frac{1}{2}e^{-4}, C_2 = \frac{1}{2}e^6$.

Vid grova fel i definitioner kan poängavdrag förekomma.

Skrivningen beräknas färdigrättas 10.november. Efter tentan finns lösningförslag på kursens webbsida.