

Tentamen i Matematik MAN110/MAN001

Funktionslära

1. Ge definitionen av kontinuerliga funktioner. Argumentera på vilka intervall som funktionen $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + 1)$ är kontinuerlig. *Funktionen är definierad på $|x| \geq 1$. det är en elem. funktion, därför kontinuerlig i hela definitionsmängden* Ge definitionen av derivatan. Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$.

$$\text{derivatan: } \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+1} \frac{x}{x^2-1}$$

På vilka intervall som funktionen f växer, minskar??

$f' > 0$ för $x \geq 1$, $v\ddot{a}xer$. $x \leq -1$ minskar

Ge definitionen av inverterbara funktioner. Är $f(x)$ inverterbar på hela definitionsmängder?

NEJ!! Exkvationen $f(x) = y$ har 2 lösningar i definitionsmängder.

På halv-axeln $(2, \infty)$? *Ja* På halvaxeln $(-\infty, 0)$. *ja*

12p

2. Hitta derivator av: $\arcsin(\ln x - 2)$, $(\arctan(4x - 1))^2$, $(\sin(x - 5) + \tan x)^{\frac{1}{3}}$. 10p Svar:

$$1. \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x-2)^2}} \frac{1}{x}, \quad 2. 2 \arctan(4x-1) \frac{1}{1+(4x-1)^2} \times 4. \quad 3. \frac{1}{3} (\sin(x-5) + \tan x)^{-\frac{2}{3}} (\cos(x-5) + \frac{1}{\cos^2 x}).$$

3. Ge definitionen till den primitiva funktionen. Formulera integralkalkylens huvudsats. Formeln för variabelbyte. Beräkna integraler

$$\int_0^3 \frac{2x-1}{(x+5)(x^2+1)} dx, \quad \int_0^1 e^x \cos(1+e^x) dx, \\ \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx, \quad \int_0^1 (x-1)e^x dx.$$

12p

Svar:a. Partialbråkuppdelning,

$$\frac{2x-1}{(x+5)(x^2+1)} = \frac{-41}{26} \frac{1}{x+5} + \frac{\frac{41}{26}x - \frac{3}{26}}{x^2+1}$$

$$\int_0^3 \frac{2x-1}{(x+5)(x^2+1)} dx = \left[\frac{-41}{26} \ln|x+5| + \frac{41}{42} \ln(x^2+1) - \frac{3}{26} \arctan x \right] \Big|_0^3$$

b. Variabelbyte:

$$\int_0^1 e^x \cos(1+e^x) dx = \int_0^1 \cos(1+e^x) (e^x)' dx = \int_1^e \cos(1+t) dt = \sin(1+e) - \sin 1.$$

c. variabelbyte:

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = - \int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x} (\cos x)' dx = - \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2} = \arctan 1 - \arctan(-1).$$

d. Partialintegrering

$$\int_0^1 (x-1)e^x dx = \int_0^1 (x-1)(e^x)' dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1) dx \\ = (x-1)e^x \Big|_0^1 + (x^2/2 - x) \Big|_0^1$$

4. Beskriv vad som är differentialekvationer. Definiera ordningen av en differentialekvation. Hur känner man igen linjära differentialekvationer? Vad är allmänna lösningen? Lös differentialekvationer (med begynnelsevillkoren)

(a) $y' = \frac{2}{x}y + x^2 \sin(3x + \pi)$, $y(\pi) = 1$,

En linjär ekvation. Multiplicerar med $\exp(-2 \ln(x)) = \frac{1}{x^2}$, $(x^{-2}y)' = \sin(3x + \pi)$, $x^{-2}y = -\frac{1}{3} \cos(3x + \pi) + C$, $y(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x + \pi)x^2 + Cx^2$, sätter $x = \pi$, $y(\pi) = 1$, hittar C

(b) $y' = \sin t(y^2 + 1)$, $y(0) = 0$, En separabel ekvation,

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = \sin t dt$$

$\arctan y = -\cos t + C$, $y(t) = \tan(-\cos t + C)$, C hittar ur $y(0) = \tan(-\cos 0 + C) = 0$, $C = 1$

(c) $y'' + 4y' + 3y = 8t + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ Andra ordningen ekvation.

Karakteristiska ekv.: $k^3 + 4k + 3 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = -3$ Lösningen till ohomogena ekv. söks som $y_o(t) = At + B$, sätter in i ekvationen, hittar $A = 8/3$, $B = -29/9$. Allmänna lösningen:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + At + B.$$

C_1, C_2 hittas ur begynnelsevillkoren.

16p

5. Lös systemet differentialekvationer $x'(t) = x(t) - 4y(t)$, $y'(t) = 2x(t) + 7y(t)$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$. 10p

Matrisen har formen $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Eigenvärden är lösningar till ekvationen $(1-\lambda)(7-\lambda)+8=0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Eigenvektorer:

$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Allmänna lösningen:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$C_1, C_2 \text{ hittas ur begynnelsevillkoren } C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vid grova fel i definitioner kan poängavdrag förekomma.

Skrivningen beräknas färdiggrättas 17.november. Efter tentan finns lösningförslag på kursens webbsida.