

Tentamen i Matematik MAN110/MAN001

Funktionslära

1. Ge definitionen av kontinuerliga funktioner. Argumentera på vilka intervall som funktionen $f(x) = \sqrt{\arctan x - \pi/4}$ är kontinuerlig. *Funktionen är definierad på $x \geq 1$. det är en elem. funktion, därför kontinuerlig i hela definitionsmängden* Ge definitionen av derivatan. Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$.

$$\text{derivatan: } \frac{1}{2}(\arctan x - \pi/4)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)^{-1}$$

På vilka intervall som funktionen f växer, minskar??

$f' > 0$ för alla x , växer.

Ge definitionen av inverterbara funktioner. Är $f(x)$ inverterbar på hela definitionsmängden?

Ja!! Ekvationen $f(x) = y$ har en lösning i hela definitionsmängden.

$$f^{-1}(y) = \tan(y^2 + \frac{\pi}{4}) \quad 12p$$

2. Hitta derivator av: $\arctan(e^{2x} - 2)$, $(\ln(4x - 1))^3$, $((x - 5)^{-3} + e^x)^{\frac{1}{3}}$. 10p Svar:

$$1. \frac{2}{1+(e^{2x}-2)^2}e^{2x}. \quad 2. 3(\ln(4x-1))^2 \frac{4}{4x-1}. \quad 3. \frac{1}{3}((x-5)^{-3} + e^x)^{-\frac{2}{3}}(-3(x-5)^{-2} + e^x).$$

3. Ge definitionen till den primitiva funktionen. Formulera integralkalkylens huvudsats. Formeln för variabelbyte. Beräkna integraler

$$\int_0^3 \frac{3x+1}{(x-4)(x^2+1)} dx, \quad \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx, \\ \int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} dx, \quad \int_0^{\pi/2} (x-1) \sin x dx.$$

12p

Svar: a. Partialbråkkuppdelning,

$$\frac{3x+1}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{13}{17} \frac{1}{x-4} + \frac{\frac{-13}{17}x - \frac{1}{17}}{x^2+1}$$

$$\int_0^3 \frac{3x+1}{(x-4)(x^2+1)} dx = \left[\frac{13}{17} \ln|x-4| - \frac{13}{34} \ln(x^2+1) + \frac{-1}{17} \arctan x \right]_0^3$$

b. Variabelbyte:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \arctan x (\arctan x)' dx = (t = \arctan x) \int_0^{\pi/4} dt = \pi/4.$$

c. variabelbyte:

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{1}{2-\sin^2 x} (\sin x)' dx = \int_0^0 \frac{1}{2+t^2} dt = 0.$$

d. Partialintegrering

$$\int_0^{\pi/2} (x-1) \sin x dx = - \int_0^{\pi/2} (x-1)(\cos x)' dx = -(x-1)(\cos x)|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \\ = -(x-1) \cos x|_0^{\pi/2} + (\sin x)|_0^{\pi/2}$$

4. Beskriv vad som är differentialekvationer. Definiera ordningen av en differentialekvation. Hur känner man igen linjära differentialekvationer? Vad är allmänna lösningen? Lös differentialekvationer (med begynnelsevillkoren)

(a) $y' = \frac{y}{x} + x \tan(x+1)$, $y(1) = 1$,

En linjär ekvation. Multiplicerar med $\exp(-\ln(x)) = x^{-1}$, $(y/x)' = \tan(x+1)$, $y/x = \ln \sin(x+1) + C$, $y(x) = x \ln \sin(x+1) + cx$, sätter $x = 1$, $y(1) = 1$, hittar $C = 1 - \ln \sin(2)$

(b) $y' = \frac{\sqrt{y}}{x^2+1}$, $y(1) = 1$, En separabel ekvation,

$$y^{-1/2} dy = \frac{dx}{x^2+1}.$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \arctan x + C, y(x) = (\frac{1}{2}(\arctan x + C))^2, C \text{ hittar ur } y(1) = 1.$$

(c) $y'' + 5y' + 4y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ Andra ordningen linjär ekvation.

Karakteristiska ekv.: $k^3 + 5k + 4 = 0$, $k_1 = -1$, $k_2 = -4$ Lösningen till ohomogena ekv. söks som $y_o(t) = At + B$, sätter in i ekvationen, hittar $A = 1/4$, $B = -5/16$. Allmänna lösningen:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t} + At + B.$$

C_1, C_2 hittas ur begynnelsevillkoren.

16p

5. Lös systemet differentialekvationer $x'(t) = 3x(t) - 4y(t)$, $y'(t) = x(t) + 9y(t)$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$. 10p

Matrisen har formen $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

Eigenvärden är lösningar till ekvationen $(3-\lambda)(9-\lambda)+6=0$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 7$. Egenvektorer:

$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Allmänna lösningen:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

C_1, C_2 hittas ur begynnelsevillkoren $C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Vid grova fel i definitioner kan poängavdrag förekomma.

Skrivningen beräknas färdigrättas 17.november. Efter tentan finns lösningförslag på kursens webbsida.