

Lösningar

$$1. f(x) = \sqrt{\arctan(2+\ln x) - \pi/4}$$

Definitionsmängden: $\arctan(2+\ln x) - \pi/4 \geq 0$;

$$\arctan(2+\ln x) \geq \pi/4 \quad ; \quad 2+\ln x \geq \tan(\pi/4) = 1$$

$$\ln x \geq -1, \quad x \geq e^{-1}$$

På den mängden är $f(x)$ kontinuerlig som en kombination av basalelementära funktioner.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(2+\ln x) - \pi/4}} \cdot (\arctan(2+\ln x) - \pi/4)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(2+\ln x) - \pi/4}} \cdot \frac{1}{(2+\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

derivatan existerar för $x > e^{-1}$.

$f'(x) > 0$ för alla tillåtna x , funktionen är strängt växande på hela definitionsmängden.

Inverterbarhet: löser ekvationen $f(x) = y$

$$\sqrt{\arctan(2+\ln x) - \pi/4} = y; \quad \arctan(2+\ln x) = y^2 + \pi/4$$

$$2+\ln x = \tan(y^2 + \pi/4); \quad x = e^{\tan(y^2 + \pi/4) - 2}$$

- bara en lösning, funktionen är inverterbar på hela definitionsmängden. På intervallet $[0, \infty)$ ingår inga kritiska punkter.

$$f(1) = \sqrt{\arctan(2) - \pi/4},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sqrt{\pi/2 - \pi/4} = \sqrt{\pi/4}. \quad \text{funktionen}$$

är växande. Därför $f(1)$ är det minsta värdet, det största värdet saknas.

2. a. Partielbrännuppdelning:

$$\frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$= \frac{Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx + 2Bx + 2C}{(x+2)(x^2+4)}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=1 \\ x^1 & 2B+C=0 \\ x^0 & 4A+2C=-1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} C=-2B \\ 4A-4B=-1 \\ A+B=1 \end{array} \right.$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 4A+4B=4 \\ 4A-4B=-1 \end{array} \right. \quad \frac{8A=3}{8A=3} ; A=\frac{3}{8}, B=\frac{5}{8}$$

$$C = -\frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{(x+2)(x^2+4)} dx = \frac{3}{8} \int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{8} \int_0^1 \frac{x}{x^2+4} dx - \frac{5}{4} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{3}{8} \ln|x+2| \Big|_0^1 + \frac{5}{16} \ln(x^2+4) \Big|_0^1 - \frac{5}{8} \arctan \frac{x}{2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{8} (\ln 3 - \ln 2) + \frac{5}{16} (\ln 5 - \ln 4) - \frac{5}{8} \arctan \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\pi} (x+1) \cos(2x) dx \stackrel{\text{part. int}}{=}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (x+1) (\sin(2x))' dx &= \frac{1}{2} (x+1) \sin(2x) \Big|_0^{\pi} \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(2x) (x+1)' dx = \frac{1}{2} ((\pi+1) \sin 2\pi - \sin 0) \\ &+ \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0. \end{aligned}$$

3. $y' = 2xy + e^{x^2} (x^5 + \frac{1}{x})$, $y(1) = 1$

Först löser den homogena ekvationen

$$y'_h = 2xy_h, \quad \frac{y'_h}{y_h} = 2x; \quad y_h = ce^{x^2}$$

Söker lösningen till inhomogena env.

$y = v(x)e^{x^2}$; sätter in i ekvationen:

$$\underline{v' e^{x^2} + v \cdot 2x \cdot e^{x^2}} = \underline{2x v e^{x^2} + e^{x^2} (x^5 + \frac{1}{x})}$$

$$v' = x^5 + \frac{1}{x}; \quad v = \frac{1}{6} x^6 + \ln|x| + C$$

$$y = \left(\frac{1}{6} x^6 + \ln|x| + C \right) e^{x^2} \quad \text{Söker } C:$$

$$y(1) = \left(\frac{1}{6} \cdot 1^6 + \ln 1 + C \right) e^1 = \left(\frac{1}{6} + C \right) e = 1$$

$$C = \frac{1}{e} - \frac{1}{6}$$

$$y' = \frac{t^2 + \tan(2t)}{\sqrt{y+5}}, \quad y(0) = 0 :$$

en separabel ekvation.

$$dy \cdot \sqrt{y+5} = dt (t^2 + \tan 2t)$$

$$\int \sqrt{y+5} dy = \int (t^2 + \tan 2t) dt$$

$$\frac{2}{3} (y+5)^{\frac{3}{2}} = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} \ln |\cos 2t| + C$$

$$y+5 = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} \ln |\cos 2t| + C \right) \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$y(t) = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} \ln |\cos 2t| + C \right) \right]^{\frac{2}{3}} - 5$$

söker C:

$$y(0) = \left(\frac{3}{2} C \right)^{\frac{2}{3}} - 5 = 0 ; \quad \frac{3}{2} C = 5^{\frac{3}{2}}$$

$$C = \frac{2}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}}$$

$$y'' + 2y' + y = 2te^{-t} ; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

homogena ekvationen

$$y_h'' + 2y_h' + y_h = 0 ; \quad \text{karakt. ekv: } k^2 + 2k + 1 = 0 ; \quad k_{1,2} = -1.$$

karakt. rötter är lika, $y_h(t) = A e^{-t} + B t e^{-t}$.

Ohomogena ekv.

$$y_0'' + 2y_0' + y_0 = 2te^{-t} . \quad \text{Söker lösningen som}$$

$$y_0 = p(t) e^{-t} : \quad y_0' = p' e^{-t} - p e^{-t}, \quad y_0'' = p'' e^{-t} - 2p' e^{-t} + p e^{-t}$$

sätter in i ekvationen:

$$p'' e^{-t} - 2p' e^{-t} + p e^{-t} + 2p' e^{-t} - 2p e^{-t} + p e^{-t} = 2te^{-t}$$

$$p'' = 2t ; \quad p' = t^2 ; \quad p = \frac{t^3}{3}$$

Allmänna lösningen;

5

$$y = Ae^{-t} + Bte^{-t} + \frac{t^3}{3}e^{-t}$$

$$y(0) = A ; A = 0$$

$$y'(t) = Be^{-t} - Bte^{-t} + t^2e^{-t} - \frac{t^3}{3}e^{-t}$$

$$y'(0) = Be^{-0} = B = 1$$

$$y = te^{-t} + \frac{t^3}{3}e^{-t}$$

$$4. X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} ; X' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} X$$

Egenvärden till $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 - 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 ; \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$$

Söker egenvektorer. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$

$$-p_1 + 4q_1 = 5p_1 ; -4p_1 + 4q_1 = 0 ; p_1 = q_1 = 1 ; e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} ; -p_2 + 4q_2 = -3p_2 ; 2p_2 + 4q_2 = 0$$

$$q_2 = 1, p_2 = -2 ; e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$X(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 + c_2 = 2, c_1 - 2c_2 = -1$$

$$c_1 = 1, c_2 = 1 ; X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$