

Lösningar

1) f är definierad om $x \neq 3$ och $\frac{2x}{3-x} \geq 0$

Teknertabell:

x	0	+	+	+	+	+
2x	-	-	-	0	+	+
3-x	+	+	+	+	+	+
$\frac{2x}{3-x}$	-	-	-	0	+	+

der $0 \leq x < 3$. Svar $D_f = [0, 3[$

2) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{"0/0"} = [L'Hôpital] =$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 + \frac{\sin x}{e^x})}{e^x(1 + \frac{\cos x}{e^x})} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{e^x}}{1 + \frac{\cos x}{e^x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

3)

$\begin{cases} x - 3y - z = -2 \\ 2x - 4y + 2z = p \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 3y - z = -2 \\ 2y + 4z = p + 4 \\ -y - 2z = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 3y - z = -2 \\ y + 2z = \frac{p+4}{2} \\ 0 = \frac{p}{2} - 1 \end{cases}$

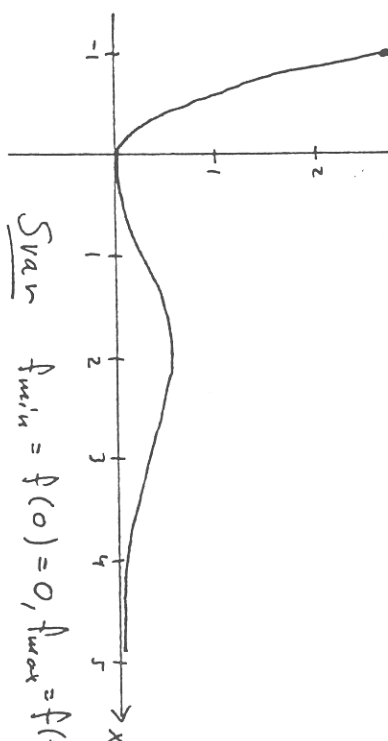
Om $\frac{p}{2} - 1 \neq 0$ dvs $p \neq 2$
är systemet olösbart.
För $p = 2$ fås:
 $\begin{cases} x - 3y - z = -2 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$
Sätt $z = t$. Då $x - y = 1 - 2t =$
 $= 1 - 2t$ och $x = 3y + z - 2 =$
 $= 3(1 - 2t) + t - 2 = 1 - 5t$.
Svar för $p = 2$ fås
 $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ Annars
lösbart

4)

$f(x) = x^2 e^{-x}$, $x \geq -1$
 $f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) =$
 $= x(2-x)e^{-x}$ så $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 2$.

x	-1	0	2	(∞)
f'(x)	-	-	0	+
f(x)	e	0	4/e	0

ty $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ ($e^x \gg x^2$)



Svar $f_{min} = f(0) = 0$, $f_{max} = f(2) = \frac{4}{e}$

5) a) $\int \frac{dx}{2x + \sqrt{x}} = \int_{x=t^2}^{t=\sqrt{x}} dx = 2t + dt =$

$= \int \frac{2t + dt}{2t^2 + t} = 2 \int \frac{1}{2t + 1} dt =$

$= 2 \cdot \frac{\ln|2t+1|}{2} + C = \ln(2\sqrt{x} + 1) + C$

b) $\int_0^1 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx = \int_0^1 \frac{3x+7}{(x+2)(x+3)} dx = \left[\text{"Handpåkänning"} \right]$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \left[\ln|x+2| + 2\ln|x+3| \right]_0^1$

$= (\ln 3 + 2\ln 4) - (\ln 2 + 2\ln 3) = 3\ln 2 - \ln 3$
($= \ln \frac{8}{3}$)