6. $P = (1,1,3) \quad Q = (1,0,-1) \quad R = (4,3,2)$

Sätt $\vec{u} = \vec{PQ} = (1,0,-1) - (1,1,3) = (0,-1,-4)$

$\vec{v} = \vec{PR} = (4,3,2) - (1,1,3) = (3,2,-1)$

Dessa är parallella med planet, så

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ är en normalvektor till planet.

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (9,-12,3)$$

(x,y,z) ligger i planet $\Leftrightarrow$

$$(9,-12,3) \cdot (x-1, y-0, z-(-1)) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$9(x-1) - 12y + 3(z+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$3x - 4y + z = 2$$

Svar Planets ekvation är $3x-4y+z=2$.

7. Homogen ekvation: $y_h'' + 4y_h = 0$

Karakteristisk ekvation: $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$

Så $y_h(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t)$

Ansätt partikulär lösning:

$y_p = C\sin t + D\cos t$

$y_p' = C\cos t - D\sin t$

$y_p'' = -C\sin t - D\cos t$

$y_p'' + 4y_p = -C\sin t - D\cos t + 4(C\sin t + D\cos t)$

$= 3C\sin t + 3D\cos t \underset{\text{vill ha}}{=} \cos t$

Så $\begin{cases} 3C = 0 \\ 3D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\therefore \quad y_p = \frac{1}{3} \cos(t)$

Allmän lösning till ekvationen

$y = y_p + y_h = \frac{1}{3}\cos t + A\sin(2t) + B\cos(2t)$, $A,B \in \mathbb{R}$.

$y' = -\frac{1}{3}\sin t + 2A\cos(2t) - 2B\sin(2t)$

$y(0) = 0$ ger $\frac{1}{3} + B = 0$ dvs $B = -\frac{1}{3}$

$y'(0) = 2$ ger $2A = 2$ dvs $A = 1$

Svar $y(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos(2t)) + \sin(2t)$

8) $y = e^x = f(x) \qquad f'(x) = e^x$

Tangent till $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$:

$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Leftrightarrow$

$y - e^a = e^a(x-a) \Leftrightarrow$

$\underline{y = e^a x + e^a(1-a)}$

$y = 2 + \ln x = g(x) \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

Tangent till $y = g(x)$ i punkten $(b, g(b))$:

$y - g(b) = g'(b)(x-b) \Leftrightarrow$

$y - (2 + \ln b) = \frac{1}{b}(x-b) \Leftrightarrow$

$\underline{y = \frac{1}{b}x + 1 + \ln b}$

Gemensamma tangenter fås av $\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} & (1) \\ e^a(1-a) = 1 + \ln b & (2) \end{cases}$

(1) ger $b = e^{-a}$, stoppa in i (2): $e^a(1-a) = 1-a \Leftrightarrow$ $a = 0$ eller $a = 1$. Alltså, två lösningar $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ resp. $\begin{cases} a=1 \\ b=1/e \end{cases}$ som ger tangenterna $\underline{y = x+1}$ resp. $\underline{y = e \cdot x}$.