$t=1$ ger $f_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Egenvektorer $f_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ med egenvärde $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} (1-3)x - 2y = 0 \\ x + (4-3)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$t=1$ ger $f_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Svar $f_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ har eg.v. $\lambda_1 = 2$, $f_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ har eg.v. $\lambda_2 = 3$

b) Vi söker a, b så att $v = a f_1 + b f_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

så $v = -f_1 + f_2$. Vi får:

$$A^n v = -A^n f_1 + A^n f_2 = -2^n f_1 + 3^n f_2 =$$

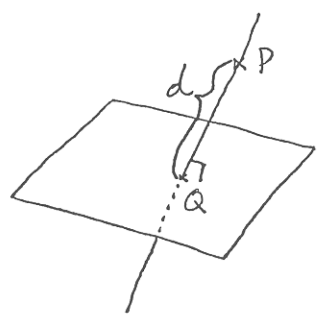
$$= -2^n \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2^{n+1} - 3^n \\ 3^n - 2^n \end{bmatrix}}}$$

7) normalvektor till planet:

$\vec{n} = (1, 3, -1)$

Normallinjen genom P:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$$



Skärningen med planet:

$$(1+t) + 3(-2+3t) - (4-t) = 2 \Leftrightarrow t = 1$$

så $Q = (1+1, -2+3\cdot 1, 4-1) = (2, 1, 3)$

$\vec{QP} = (1, -2, 4) - (2, 1, 3) = (-1, -3, 1)$

Avståndet $d = |\vec{QP}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{11}}}$

8) Homogen ekvation: $y_h'' + y_h' - 6y_h = 0$

Kar. ekv. $r^2 + r - 6 = 0 \Leftrightarrow (r+3)(r-2) = 0$

så $r_1 = -3$, $r_2 = 2$ så $y_h = Ae^{-3t} + Be^{2t}$

Vi ansätter partikulärlösning:

$$y_p = C\sin t + D\cos t$$
$$y_p' = C\cos t - D\sin t$$
$$y_p'' = -C\sin t - D\cos t$$

så $y_p'' + y_p' - 6y_p = (-7C - D)\sin t + (C - 7D)\cos t \underset{\text{vill ha}}{=} 50\cos t$

så

$$\begin{cases} -7C - D = 0 \\ C - 7D = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = -7 \end{cases}$$

så $y_p = \sin t - 7\cos t$

Allmän lösning: $y = y_p + y_h$ så

$$y = \sin t - 7\cos t + Ae^{-3t} + Be^{2t}$$
$$y' = \cos t + 7\sin t - 3Ae^{-3t} + 2Be^{2t}$$

Begynnelsevillkoren ger:

$$\begin{cases} y(0) = -7 + A + B = 0 \\ y'(0) = 1 - 3A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 4 \end{cases}$$

Svar: $y(t) = \sin t - 7\cos t + 3e^{-3t} + 4e^{2t}$