b) $\int_0^\infty \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} s = x/\sqrt{3} & \begin{array}{c|c} x & s \\ 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{array} \\ dx = \sqrt{3}\,ds & \end{array}\right]$

$= \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{1}{1+s^2}\sqrt{3}\,ds = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan s\right]_0^\infty =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}}$

6) a) $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (-1-\lambda)(4-\lambda)+6 = 0$

$\iff \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ så $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$

Egenvektoren $f_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ med egenvärde $\lambda_1 = 2$:

$\begin{cases} (-1-2)x + y = 0 \\ -6x + (4-2)y = 0 \end{cases} \iff y = 3x \iff \begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

$t = 1$ ger $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Egenvektoren $f_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ med egenvärde $\lambda_2 = 1$

$\begin{cases} (-1-1)x + y = 0 \\ -6x + (4-1)y = 0 \end{cases} \iff y = 2x \iff \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

$t = 1$ ger $f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

<u>Svar</u>: $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ har eg.v. $\lambda_1 = 2$, $f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har eg.v. $\lambda_2 = 1$.

b) Vi söker tal a, b s.a. $v = af_1 + bf_2 \iff$

$\iff \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+2b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

$v = f_1 - f_2$ så $A^{10}v = A^{10}f_1 - A^{10}f_2 =$

$= 2^{10}f_1 - f_2 = 2^{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{10}-1 \\ 3\cdot 2^{10}-2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1023 \\ 3070 \end{bmatrix}}}$

7) Homogena ekvationen: $y_h'' - 4y_h' + 3y_h = 0$

Karakteristisk ekv.: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \iff \lambda = 1$ el. $\lambda = 3$

så $y_h = Ae^t + Be^{3t}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Vi ansätter partikulärlösning: $y_p = Ce^{2t}$

$y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 4Ce^{2t} - 4\cdot 2Ce^{2t} + 3Ce^{2t} =$

$= -Ce^{2t} = e^{2t}$ så $C = -1$.

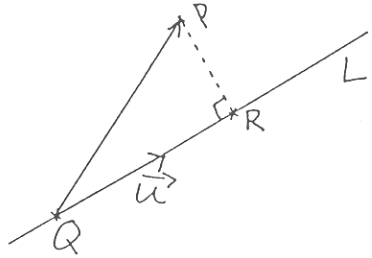
Allmän lösning: $y = y_p + y_h = -e^{2t} + Ae^t + Be^{3t}$

$y' = -2e^{2t} + Ae^t + 3Be^{3t}$

Begynnelsevillkoren ger $\begin{cases} -1 + A + B = 1 \\ -2 + A + 3B = 1 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} A = 3/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$ <u>Svar</u> $y(t) = -e^{2t} + \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t}$

8) $Q = (-1,-6,2) \in L \quad (t=0)$



$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = (3,1,2) - (-1,-6,2) =$

$= (4,7,0)$

Vi söker $|\overrightarrow{RP}|$ där

R är projektionen av P på L.

Riktningsvektor för linjen:

$\vec{w} = (1,2,2) \qquad |\vec{w}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$

$\vec{u} = \frac{1}{3}(1,2,2)$ är riktningsvektor med $|\vec{u}| =$

Vi projicerar:

$\overrightarrow{QR} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u} = \frac{1}{3}(1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 2\cdot 0)\vec{u} =$

$= 6\vec{u} = (2,4,4)$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QR} = (4,7,0) - (2,4,4) = (2,3,-4)$

så det sökta avståndet är

$|\overrightarrow{RP}| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \underline{\underline{\sqrt{29}}}$