

Tentamensskrivning i Naturvetarmatematik, MAN110

1. Vi söker först en partiellösning i formen $y(t) = Ae^{3t}$. Vi har $y'(t) = 3Ae^{3t}$, $y''(t) = 9Ae^{3t}$, alltså $y'' + 4y' - 5y = 16Ae^{3t} = 6e^{3t}$ och $A = 3/8$. Låt $y_p(t) = 3/8e^{3t}$.

Nu letar vi efter lösningen till homogena ekvationen $y'' + 4y' - 5y = 0$. Vi skriver karakteristiska ekvationer $k^2 + 4k - 5 = 0$. Ekvationen har rötter $k_1 = 1$, $k_2 = -5$. Så blir allmänna lösningen $y_h = C_1e^t + C_2e^{-5t}$ med godtyckliga konstanter C_1, C_2 . Ny för inhomogena ekvationen blir allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = C_1e^t + C_2e^{-5t} + y_p(t) = 3/8e^{3t}.$$

2. (a) $p = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-5}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3/n-5/(n^2)}{n^{-2}+1} = 0$.
 (b) $p = 1; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-6}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4/n-6/(n^2)}{n^{-2}+1} = 0$.
 (c) $p = 2; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n-6}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n-6/(n^2)}{n^{-2}+1} = 1$.
 (d) $p = 3; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+3n-6}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3/n-6/(n^2)}{n^{-2}+1} = \infty$.
3. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \sqrt{\frac{2x}{x-1}}$. Definitionsmängden: $x \neq 1$ och $\frac{2x}{x-1} \geq 0$, $2x(x-1) \geq 0$, slutligen, $x \leq 0$ eller $x > 1$.
 $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right)$.
 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{x+1-1} = \frac{x+2+2\sqrt{x+1}}{x}$. Definitionsmängden: $x \geq -1$ och $x \neq 0$.
 $g(f(x))' = \frac{1+1/\sqrt{x+1}-(x+2+2\sqrt{x+1})}{x^2}$.
4. (a) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x[(1+x)^{3/2}]'dx = (\text{partiellintegrering}) \left(\frac{2}{3}x(1+x)^{3/2}\right)\Big|_0^3 - \frac{2}{3} \int_0^3 (1+x)^{3/2}dx = \frac{2}{3}4^{3/2} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5(1+x)^{5/2}}\right)\Big|_0^3 = 16 - \frac{4}{15}(2^5 - 1) = \frac{116}{15}$.
 (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin^2 x - 5} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{-\cos^2 x - 4} dx = (\text{variabelbyte } t = \cos x) \int_1^0 \frac{dt}{t^2+2^2} = \left(\frac{1}{2} \arctan(t/2)\right)\Big|_1^0 = -\frac{1}{2} \arctan 1 = -\pi/8$.

5. Först beräknar derivatan $f(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}$. Därför är derivatan positiv och funktionen minskar för $x < 1$, derivatan negativ och funktionen växer för $x > 1$. Kritiska punkten är $x = 1$. Intervallet $[2, 4]$ innehåller inte den kritiska punkten, så vi måste jämföra bara värdena i gränspunkterna $f(2)$ och $f(4)$. För x i intervallet, funktionen växer, därför är $f(4)$ det största värdet och $f(2)$ det minsta värdet.

Intervallet $[0.5, 5]$ innehåller kritiska punkten $x = 1$, så jämför vi värdena $f(0.5)$, $f(1)$, $f(5)$. $f(1) = e$ är det minsta värdet, därför att funktionen växer till höger om 1 och minskar till vänster om 1. Nu jämför vi $f(0.5) = e^{0.5}/2$ och $f(5) = e^5/5$. För att avgöra vilket av dem som är det största, betraktar kvoten $f(5)/f(0.5) = e^{4.5}/10$. Vi uppskattar, t.ex., som $e^{4.5} > e^4 > (2.5)^4 = (6.25)^4 > 36$. Det är större än 10, så $f(5)/f(0.5) > 1$, och det största värdet är $f(5) = e^5/5$.

6. Vi har för längden av kryss produkten $u \times v$ att

$$|u \times v| = |u||v| \sin \phi,$$

därför

$$\sin \phi = \frac{|u \times v|}{|u||v|}.$$

. Vi hittar $|u| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$, $|v| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$. $u \times v$ hittar vi med hjälp av determinanten, $u \times v = (4, 12, 10)$, $|u \times v| = \sqrt{260}$, $\sin \phi = \frac{\sqrt{260}}{36}$.

7. Egenvärdena är rötterna till ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

eller $\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Rötterna är $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Nu söker vi egenvektorer. För $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ har vi ekvationen $Av_1 = 2v_1$, eller systemet

$$\begin{array}{rcl} (1 - 2)x_1 & +2y_1 & = 0 \\ -2x_1 & +(4 - 2)y_1 & = 0 \end{array}.$$

Vi sätter, t.ex., $y_1 = 1$ och får $x_1 = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. För $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ hittar vi $Av_2 = 3v_2$,

$$\begin{array}{rcl} (1 - 3)x_2 & +2y_2 & = 0 \\ -2x_2 & +(4 - 3)y_2 & = 0 \end{array}.$$

Så får vi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ekvationen $u = c_1v_1 + c_2v_2$ skrivs i koordinater som

$$\begin{array}{rcl} 2c_1 & +c_2 & = 1 \\ c_1 & +c_2 & = -2 \end{array}$$

. Vi löser systemet och hittar att $c_1 = -3, c_2 = 1$.

Så har vi $Au = A(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1Av_1 + c_2Av_2 = 2c_1v_1 + 3c_2v_2$, $A^2u = 2^2c_1v_1 + 3^2c_2v_2, \dots, A^nu = c_12^nc_1v_1 + c_23^nc_2v_2$.

8. (a) Lösningförslag 1. Använder Gaussmetoden. Vi subtraherar från andra ekvationen den första, multiplicerad med 2, från tredje ekvationen subtraherar vi första. Vi kommer till

$$\begin{array}{rcl} x + 3y + 5z & = & 2 \\ -y - 2z & = & 1 \\ -y - 2z & = & p - 2 \end{array}.$$

Från det sista systemet följer det att $p - 2 = 1$. Så om $p \neq 3$, så finns det inte några lösningar. Om $p = 3$, så sammanfaller den andra och den tredje ekvationen. Vi kan välja z som vi vill, från andra ekvationen följer att $y = -2z - 1$ och från första ekvationen får vi $x = 2 - 3y - 5z = 2 - 3y - 5(-2z - 1)$, alltså oändligt många lösningar.

För modifierade systemet efter första steget i Gaussmetoden, får vi

$$\begin{array}{rcl} x + 3y + 5z & = & 2 \\ -y - 2z & = & 1 \\ -y - 5z & = & p - 4 \end{array}.$$

Ett steg till i Gaussmetoden: vi subtraherar den andra ekvationen från den tredje:

$$\begin{array}{rcl} x + 3y + 5z & = & 2 \\ -y - 2z & = & 1 \\ -3z & = & p - 5 \end{array}.$$

Så får vi att $z = (5 - p)/3$; sätter det in i andra ekvationen och får $y = -1 - 2z = -1 - \frac{2}{3}(5 - p)$; sätter z och y in i första ekvationen och får $x = 2 - 3y - 5z = 2 + 3(1 + \frac{2}{3}(5 - p)) - 5(5 - p)/3$, dvs en lösning för alla p .

(b) Lösningsförslag 2. Använder determinantkriteriet. Vi har

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Därför kan systemet aldrig ha exakt en lösning. Vi beräknar

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ p & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4(p - 3).$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & p & 3 \end{vmatrix} = 2(p - 3).$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & p \end{vmatrix} = p - 3.$$

Regel säger att om $p = 3$, så finns det oändligt många lösningar, om $p \neq 3$ så finns det inga lösningar. För modifierade systemet har vi $\Delta = -3$, därför har systemet precis en lösning för alla p .