

Föreläsningsanteckningar om arcsin och arctan

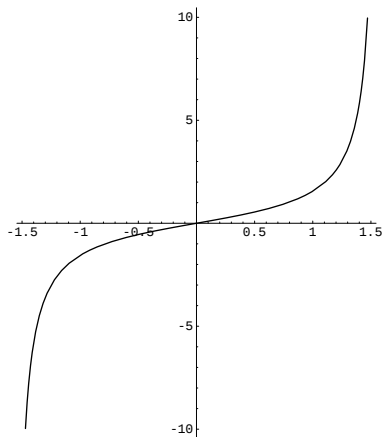
Vårt mål är att kortfattat introducera funktionerna arcsin och arctan, som man något oprecist kan uppfatta som “motsatserna” till sin- och tan-funktionerna (p.s.s. som att $\ln$ är “motsatsen” till exponentialfunktionen).

Inversa tangens

Låt oss betrakta funktionen $F(x) = \tan x$, med $D_F = (-\pi/2, \pi/2)$. Grafen $y = F(x)$ kan du se i Figur 1. Det är tydligt att funktionen antar varje y -värde exakt en gång. Speciellt innebär det att vi kan lösa ekvationen

$$y = \tan x, x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

för varje $y \in \mathbb{R}$, och att lösningen är entydigt bestämd. Eller hur?

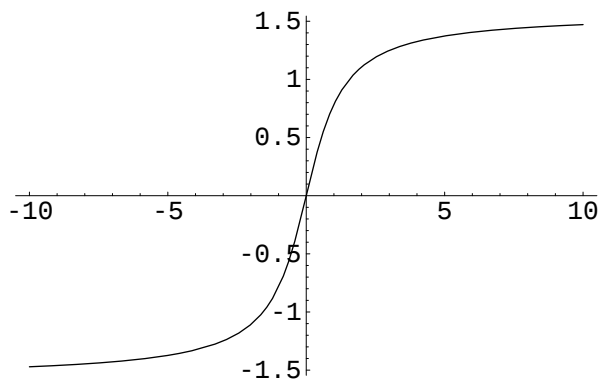


FIGUR 1. Grafen $y = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Till varje y -värde finns det exakt ett x -värde.

Lösningen x kommer ju då att vara (definiera) en funktion av y . Vi döper den funktionen till $\arctan y$ (arcus tangens av y). Vi *definierar* alltså funktionen $\arctan y$ med ekvivalensen

$$(1) \quad \boxed{y = \tan x, x \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan y.}$$

I Figur 2 nedan ser du grafen $y = \arctan x$ (observera att vi här “bytt namn” på x och y).

FIGUR 2. Grafen $y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

Detta förfarande bör jämföras med hur man inför t.ex. $\sqrt{x}$ -funktionen. Man definierar ju helt enkelt $\sqrt{a}$, $a \geq 0$, till att vara den entydiga icke-negativa lösningen till ekvationen $x^2 = a$, d.v.s.

$$a = x^2, x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{a}.$$

Det är inget mer magiskt med arctan-funktionen! Ofta vill man lösa ekvationer som innehåller tan-uttryck, och det är då smidigt att ha ett namn på lösningen till den mest basala ekvationen $y = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

EXEMPEL 1. Beräkna $\arctan 1$. Låt oss skriva $x = \arctan 1$. Enligt definitionen vi gjorde så vet vi att detta är ekvivalent med att $\tan x = 1$, där $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Men vi vet att $x = \pi/4$ är den enda lösningen till den sistnämnda ekvationen, så $\arctan 1 = \pi/4$.

EXEMPEL 2. Vad är $\arctan 2$? Med samma resonemang som ovan söker vi nu lösningen till ekvationen $\tan x = 2$, där $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Svårt... Vi kan inse att det finns exakt en lösning, men vi kan inte uttrycka den på något enkelt vis. Därför får vi nöja oss med att kalla den $\arctan 2$, helt enkelt!

Exemplen ovan kan jämföras med att beräkna t.ex. $\sqrt{9}$ och $\sqrt{2}$. I det första fallet får vi 3, men i det andra får vi helt enkelt nöja oss med $\sqrt{2}$.

Funktionen $\arctan y$ är definierad för alla $y \in \mathbb{R}$. Dess värden ligger alltid mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$. Se Figur 2.

Genom att bara studera ekvation (1) får vi fram följande viktiga egenskaper för arctan-funktionen:

- $\arctan y$ är definierat för alla $y \in \mathbb{R}$ och $-\pi/2 < \arctan y < \pi/2$.
- $\arctan(\tan x) = x$ för alla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.
- $\tan(\arctan y) = y$ för alla $y \in \mathbb{R}$.

EXEMPEL 3. Beräkna $\tan(\arctan 2)$. Formeln $\tan(\arctan y) = y$ gäller för alla $y \in \mathbb{R}$, speciellt för $y = 2$, så $\tan(\arctan 2) = 2$.

EXEMPEL 4. Beräkna $\arctan(\tan \pi/6)$. Formeln $\arctan(\tan x) = x$ gäller för alla x i intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$, speciellt för $x = \pi/6$, så $\arctan(\tan \pi/6) = \pi/6$.

EXEMPEL 5. Beräkna $\arctan(\tan 5\pi/6)$. Problem... Eftersom $5\pi/6 \notin (-\pi/2, \pi/2)$ så kan vi inte använda formeln $\arctan(\tan x) = x$. Men formler för tan-funktionen ger att $\tan 5\pi/6 = \tan(5\pi/6 + n \cdot \pi)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Vi ser nu till att välja n så att $5\pi/6 + n \cdot \pi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Vi måste välja $n = -1$ (kontrollera), så vi får

$$\arctan(\tan 5\pi/6) = \arctan(\tan(5\pi/6 - \pi)) = \arctan(\tan(-\pi/6)) = -\pi/6.$$

Vi avslutar detta avsnitt om arctan-funktionen med att bestämma dess derivata. Vi gör inget riktigt bevis, utan skissar det snarare. För att se tydligare vad som händer skriver vi $f(y) = \tan y$ och $g(x) = \arctan x$. Nu har vi att

$$f(g(x)) = x,$$

för alla x . Om vi *antar* att g är deriverbar (det är här vi fuskar litegrann) så kan vi derivera sammansättningen $f(g(x))$. Implicit derivering av likheten ovan ger då att

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

för alla x . Vi vet att $f'(y) = 1 + \tan^2 y$, vilket ger att $f'(g(x)) = 1 + (\tan g(x))^2 = 1 + x^2$. Vi har alltså att

$$(1 + x^2)g'(x) = 1,$$

vilket ger att

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2},$$

eller ekvivalent

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C.$$

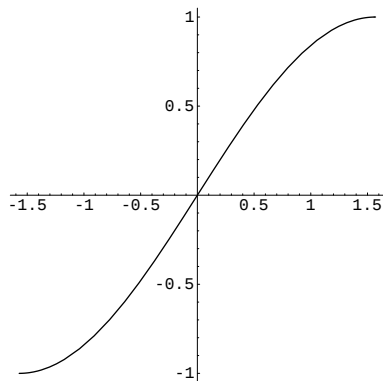
Inversa sinus

Vi ska nu göra samma sak för sinus-funktionen. I detta avsnitt är vi något mer kortfattade än i det tidigare.

Låt oss betrakta funktionen $F(x) = \sin x$, med $D_F = [-\pi/2, \pi/2]$. Grafen $y = F(x)$ kan du se i Figur 3 nedan. Det är tydligt att funktionen antar varje y -värde mellan -1 och 1 exakt en gång. Speciellt innebär det att vi kan lösa ekvationen

$$y = \sin x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

för varje $y \in [-1, 1]$, och att lösningen är entydigt bestämd.

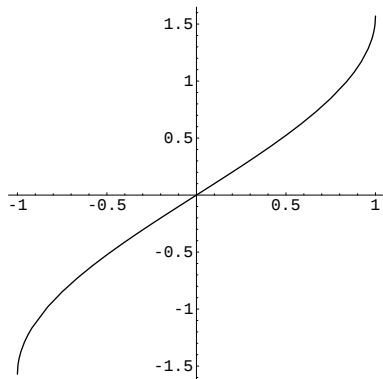


FIGUR 3. Grafen $y = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Till varje y -värde mellan -1 och 1 finns det exakt ett x -värde.

Som i fallet med tangens så kommer lösningen x att definiera en funktion av y . Vi döper den funktionen till $\arcsin y$ (arcus sinus av y). Vi *definierar* alltså funktionen $\arcsin y$ med ekvivalensen

$$(2) \quad \boxed{y = \sin x, x \in (-\pi/2, \pi/2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin y.}$$

Grafen $y = \arcsin x$ ser du i Figur 4.



FIGUR 4. Grafen $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$.

EXEMPEL 6. Beräkna $\arcsin(-1/\sqrt{2})$. Låt oss skriva $x = \arcsin(-1/\sqrt{2})$. Enligt definitionen vi gjorde så vet vi att detta är ekvivalent med att $\sin x = -1/\sqrt{2}$, där $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Men vi vet att $x = -\pi/4$ är den enda lösningen till den sistnämnda ekvationen, så $\arcsin(-1/\sqrt{2}) = -\pi/4$.

EXEMPEL 7. Vad är $\arcsin 2$? Med samma resonemang som ovan söker vi nu lösningen till ekvationen $\sin x = 2$, där $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Omöjligt, eftersom $|\sin x| \leq 1$ för alla x . Definitionsmängden till $\arcsin$ är alltså $[-1, 1]$ (varför?) så uttrycket $\arcsin 2$ saknar mening för oss.

Funktionen $\arcsin y$ är alltså definierad för $y \in [-1, 1]$. Dess värden ligger alltid mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$. Se Figur 4.

Genom att bara studera ekvation (2) får vi fram följande viktiga egenskaper för arcsin-funktionen:

- $\arcsin y$ är definierat för $y \in [-1, 1]$ och $-\pi/2 \leq \arcsin y \leq \pi/2$.
- $\arcsin(\sin x) = x$ för alla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- $\sin(\arcsin y) = y$ för alla $y \in [-1, 1]$.

EXEMPEL 8. Beräkna $\sin(\arcsin 1/3)$. Formeln $\sin(\arcsin y) = y$ gäller för alla $y \in [-1, 1]$, speciellt för $y = 1/3$, så $\sin(\arcsin 1/3) = 1/3$.

EXEMPEL 9. Beräkna $\arcsin(\sin \pi/6)$. Formeln $\arcsin(\sin x) = x$ gäller för alla x i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, speciellt för $x = \pi/6$, så $\arcsin(\sin \pi/6) = \pi/6$.

EXEMPEL 10. Beräkna $\arcsin(\sin 19\pi/5)$. Eftersom $19\pi/5 \notin [-\pi/2, \pi/2]$ så kan vi inte använda formeln $\arcsin(\sin x) = x$. Men formler för sin-funktionen ger att $\sin 19\pi/5 = \sin(19\pi/5 + n \cdot 2\pi)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Välj $n = -2$, så får vi $\sin(19\pi/5 + n \cdot 2\pi) = \sin(-\pi/5)$. Eftersom $-\pi/5 \in [-\pi/2, \pi/2]$ så har vi

$$\arcsin(\sin 19\pi/5) = \arcsin(\sin(-\pi/5)) = -\pi/5.$$

Vi avslutar med att bestämma derivatan till $\arcsin x$. Som förut genomför vi en bevisskiss och inget regelrätt bevis.

Sätt $f(y) = \sin y$ och $g(x) = \arcsin x$. Nu har vi att

$$f(g(x)) = x,$$

för alla $x \in [-1, 1]$. Om vi *antar* att g är deriverbar så kan vi derivera sammansättningen $f(g(x))$. Implicit derivering av likheten ovan ger då att

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

för alla x . Vi vet att $f'(y) = \cos y$, vilket ger att $f'(g(x)) = \cos g(x) = +\sqrt{1 - \sin^2 g(x)} = \sqrt{1 - x^2}$. Observera plustecknet vid rotutdragningen! Funktionen g antar ju värden mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$, och där är cos-funktionen icke negativ. Vi har alltså att

$$\sqrt{1 - x^2}g'(x) = 1,$$

vilket ger att

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

där vi måste kräva att $x \in (-1, 1)$, eller ekvivalent

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$$

Övningar

ÖVNING 1. Beräkna följande uttryck (om möjligt):

- (a) $\arcsin(\sqrt{3}/2)$.
- (b) $\arctan(-1)$.
- (c) $\arcsin(-\sqrt{5}/2)$.
- (d) $\arctan(\tan(2\pi/3))$.
- (e) $\tan(\arctan(2003))$
- (f) $\sin(\arctan 1)$

ÖVNING 2. Bestäm definitionsmängderna och derivatorna för följande funktioner:

- (a) $f(x) = \arctan 2x$
- (b) $f(x) = \arcsin(x - 1)$.
- (c) $f(x) = \arctan(\ln x)$.
- (d) $f(x) = x \arcsin(1/x)$.
- (e) $f(x) = \sqrt{\arctan(x^2)}$.

ÖVNING 3. Visa att

$$\arctan x = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

ÖVNING 4. Från mitt gods går en rak allé (mycket smal!) ned till en huvudväg, och träffar denna under rät vinkel. Från korsningen är det 40 meter till alléns första träd, och 250 meter till dess sista. Var på huvudvägen bör jag ställa mig för att beskåda min magnifika allé under störst vinkel, och hur stor är denna vinkel?

ÖVNING 5. Lös differentialekvationerna

- (a) $y' = \frac{1}{1+x^2}$, där $y(0) = 1$.
- (b) $y' = \frac{1}{9+x^2}$, där $y(3) = 2$.
- (c) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, där $y(1/2) = 1$.
- (d) $y' = \frac{4}{\sqrt{25-x^2}}$, där $y(0) = 0$.

ÖVNING 6. Bestäm primitiva funktioner till följande funktioner:

- (a) $\frac{1}{4+x^2}$.
- (b) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

ÖVNING 7. Bestäm primitiva funktioner till följande funktioner:

- (a) $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
- (b) $\sqrt{1-x^2}$.

ÖVNING 8. Bestäm primitiva funktioner till $\arctan x$ och $\arcsin x$.

Tips och facit

- (1) (a) $\pi/3$.
 (b) $-\pi/4$.
 (c) Ej definierat.
 (d) $-\pi/3$.
 (e) 2003.
 (f) $1/\sqrt{2}$.
- (2) (a) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2/(1 + 4x^2)$.
 (b) $D_f = [0, 2]$, $f'(x) = 1/\sqrt{2x - x^2}$.
 (c) $D_f = \mathbb{R}_+$, $f'(x) = [x(1 + \ln^2 x)]^{-1}$.
 (d) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, $f'(x) = \arcsin(1/x) - (\operatorname{sign} x)/\sqrt{x^2 - 1}$.
 (e) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = x[(1 + x^4)\sqrt{\arctan(x^2)}]^{-1}$.
- (3) Bilda $f(x) = \arctan x - \arcsin(x[\sqrt{1 + x^2}]^{-1})$, $D_f = \mathbb{R}$. Vill visa att $f(x) = 0$ för alla x . Räcker då att visa att $f'(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och att (t.ex.) $f(0) = 0$ (varför?).
- (4) Man bör ställa sig exakt 100 meter från allén. Vinkeln blir $\arctan(2.5) - \arctan(0.4) \approx 46.4^\circ$.
- (5) (a) $y(x) = 1 + \arctan x$.
 (b) $y(x) = 2 - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3}$.
 (c) $y(x) = 1 - \pi/6 + \arcsin x$.
 (d) $y(x) = 4 \arcsin \frac{x}{5}$.
- (6) (a) $y(x) = C + \frac{1}{2} \arctan(x/2)$.
 (b) $y(x) = C + \arcsin(x/3)$.
- (7) (a) $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right) + C$.
 (b) $\frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) + C$.
- (8) Primitiven till $\arctan x$ är $x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2} + C$. Primitiven till $\arcsin x$ är $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.