

(1) Lös följande differensekvationer:

$$(a) \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + 1, & n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = 7 \end{cases}.$$

$$(b) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 5, & n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = 5 \end{cases}.$$

(2) För differensekvationen

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + k, & n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

har man $x_1 = 3$. Lös differensekvationen och avgör om det finns något $n \in \mathbb{N}$ för vilket $x_n = 53$?

(3) Lös följande differentialekvationer:

$$(a) \quad x^3 + 3y - xy' = 0 \text{ för } x > 0, \text{ med } y(1) = 0.$$

$$(b) \quad xy^2 + 3y^2 - x^2y' = 0 \text{ för } 0 < x < e, \text{ med } y(1) = 1/3.$$

$$(c) \quad 3y + x^4y' = 2xy \text{ för } x > 0, \text{ med } y(1) = 1.$$

$$(d) \quad y' = \frac{2xy + 2x}{x^2 + 1}, \quad y(0) = 0.$$

(4) Lös differentialekvationen $y' = x^2 - 2xy + y^2$, $y(0) = 0$, genom att införa $y(x) = x + z(x)$.

(5) Två tankar A och B är sammankopplade. Volymerna ges av $V_A = 20$ och $V_B = 50$ (liter). Rent vatten strömmar in i tank A med hastigheten 5 liter per minut, vatten från tank A rinner över i tank B med samma hastighet, och slutligen förs (med samma hastighet) vatten bort från tank B . Mängden salt (i gram) vid tidpunkten t (minuter) betecknas med $x_A(t)$ respektive $x_B(t)$. Man vet att $x_A(0) = 500$ och $x_B(0) = 0$. Vid vilken tidpunkt är mängden salt lika stor i tank A som i tank B ? Vid vilken tidpunkt är koncentrationerna lika?

(6) Betrakta samma system av tankar som i uppgiften ovan. Istället för att låta vattnet rinna kontinuerligt så håller man istället i 5 liter rent vatten (mycket snabbt) en gång per minut. Bestäm $x_A(n)$, d.v.s. mängden salt i tank A efter n (hela) minuter. Klarar du av att bestämma $x_B(n)$ (svårare)?

(7) *Detta problem är ganska svårt. Du kommer att behöva kombinera listighet med blandade kunskaper i matematik.* Man kan från diverse olika företag på internet tanka ned gratis musik till sin dator. Jag vill tanka ned ett speciellt mästestycke som är 40 minuter långt och 40 MB stort. Vid uppkopplingen mot företaget (som heter WinMX) får jag en konstant nedladdningshastighet på 10 kB per sekund. Nedladdningen går till så att början av låten kommer först, och slutet sist. I praktiken innebär det att jag kan lyssna på min låt (eller snarare del av låt) under tiden som den tankas ned. Jag sätter min musikspelare på Repeat, så varje gång låten

tar slut så börjar den om från början igen, samtidigt som den kontinuerligt blir längre (eftersom nedladdningen av låten pågår även under tiden som jag lyssnar på den). Jag påbörjar nedladdningen! Efter 10 sekunder trycker jag på Play.

- (a) Hur många sekunder låt får jag avnjuta innan den börjar om från början igen?
- (b) Hur lång blir andra uppspelningen?
- (c) Hur lång blir n :te uppspelningen och vid vilken uppspelning kan jag för första gången höra stycket i sin helhet?

FACIT

- (1) (a) $x_n = (1 + 20 \cdot (-2)^n)/3$.
(b) $x_n = 5(n + 1)$.
- (2) $x_n = (3^n + 3)/2$. Nej, ett sådant $n \in \mathbb{N}$ finns ej.
- (3) (a) $y(x) = x^3 \ln x$.
(b) $y(x) = x/(3 - x \ln x)$.
(c) $y(x) = e^{(x-1)/x^3}$.
(d) $y(x) = x^2$.
- (4) $y(x) = x - (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$.
- (5) Mängden salt är lika vid tidpunkten $\frac{20}{3} \ln \frac{8}{5}$ minuter. Koncentrationerna är lika vid tidpunkten $\frac{20}{3} \ln \frac{5}{2}$ minuter.
- (6) $x_A(n) = 500 \cdot (3/4)^n$. $x_B(n) = \frac{2500}{3}((9/10)^n - (3/4)^n)$.
- (7) (a) 15 sekunder.
(b) 37.5 sekunder.
(c) n :te uppspelningen tar $6 \cdot (5/2)^n$ sekunder om $1 \leq n \leq 6$, och 40 minuter för $n \geq 7$. Stycket kan (alltså) avnjutas i sin helhet från och med sjunde uppspelningen.