(1) Sätt $u = \arctan 3$ och $v = \arctan(1/2)$. Då gäller att $\tan u = 3$ och $\tan v = 1/2$. Det följer att

$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v} = \frac{3 - 1/2}{1 + 3/2} = 1.$$

Alltså har vi att $\tan \alpha = 1$.

(2) Vi har att $p(x) = x^2 - 6x + a = (x-3)^2 - 9 + a$.

$(a = 8)$ Här har vi $p(x) = (x-3)^2 - 1 = (x-3-1)(x-3+1) = (x-4)(x-2)$. Vi gör en partialbråkssönderläggning. Ansätt

$$\frac{2}{p(x)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - (2A+4B)}{p(x)}.$$

Likheten skall gälla för alla $x \in \mathbb{R}$, vilket ger att

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ -2A - 4B &= 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \end{cases}.$$

Alltså,

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{p(x)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= \ln|x-4| - \ln|x-2| + C \\ &= \ln\left| \frac{x-4}{x-2} \right| + C. \end{aligned}$$

$(a = 9)$ Här har vi $p(x) = (x-3)^2$, så

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{p(x)}\,dx &= \int \frac{2}{(x-3)^2}\,dx \\ &= -\frac{2}{x-3} + C. \end{aligned}$$

$(a = 10)$ Här har vi $p(x) = (x-3)^2 + 1$, så

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{p(x)}\,dx &= \int \frac{2}{(x-3)^2 + 1}\,dx \\ &= 2\arctan(x-3) + C. \end{aligned}$$

(3) (a) Funktionen $f(x) = x + x^{10}\ln x$ innehåller en produkt av polynom och och logaritm, och bör sålunda partialintegreras (polynomet integreras och logaritmen deriveras):

$$\begin{aligned} \int \left(x + x^{10}\ln x \right) dx &= \frac{x^2}{2} + \int x^{10}\ln x\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{11}}{11}\ln x - \int \frac{x^{11}}{11} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{11}}{11}\ln x - \int \frac{x^{10}}{11}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{11}}{11}\ln x - \frac{x^{11}}{11^2} + C. \end{aligned}$$

(*b*) Här lämpar sig substitution bäst, därför att faktorn x är “ungefär” derivatan av den inre funktionen $1+x^2$. Vi får

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \left\{\begin{array}{c} y=1+x^2 \\ dy=2xdx \\ x\,dx=\frac{1}{2}dy \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int\sqrt{y}\,dy \\ &= \frac{1}{3}y^{3/2}+C \\ &= \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3}+C.\end{aligned}$$

Lösningsförslag - Inlämningsuppgift 2, Tillämpningar VT -03, Martin Brundin

(1) Differentialekvationen är given av

$$y''-4y'+3y=e^{2x}(x+\sin 3x),$$

där $y(0)=2$ och $y'(0)=47/10$. Vi inför en ny funktion z genom

$$y(x)=z(x)e^{2x}.$$

Då har vi $y'=(z'+2z)e^{2x}$, och $y''=(z''+2z'+2(z'+2z))e^{2x}=(z''+4z'+4z)e^{2x}$. Vår differentialekvation övergår alltså i

$$(z''+4z'+4z)e^{2x}-4(z'+2z)e^{2x}+3ze^{2x}=e^{2x}(x+\sin 3x),$$

som (efter förenkling) är ekvivalent med

$$z''-z=x+\sin 3x.$$

Att $y(0)=2$, blir ekvivalent med $z(0)=2$ och $y'(0)=47/10$ ger $z'(0)=7/10$.

För att finna en partikulärlösning ansätter vi $z_p(x)=Ax+B\sin 3x$ (varför behövs ingen cosinusterm?). Om vi stoppar in i vår ekvation får vi

$$(0-9B\sin x)-(Ax+B\sin 3x)=x+\sin 3x.$$

Vi ser att vi ska välja $A=-1$ och $B=-1/10$. Alltså är

$$z_p(x)=-x-\frac{1}{10}\sin 3x$$

en partikulärlösning. Vi söker nu de homogena lösningarna $z_h(x)$. Karakteristiska ekvationen är $r^2-1=0$, vilket ger $r=\pm 1$, så

$$z_h(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

Lösningen till ekvationen (i z) ges nu av

$$z(x)=z_p(x)+z_h(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-x-\frac{1}{10}\sin 3x.$$

Villkoret $z(0)=2$ ger direkt att $C_1+C_2=2$ och villkoret $z'(0)=7/10$ ger (efter derivering) $C_1-C_2-1-3/10=7/10$, med lösning $C_1=2$ och $C_2=0$. Alltså,

$$z(x)=2e^x-x-\frac{1}{10}\sin 3x,$$

vilket ger

$$\boxed{y(x)=\frac{e^{2x}}{10}\left(20e^x-10x-\sin 3x\right).}$$

(2) (*a*) Uppgiften skall lösas med integrerande faktor. Vi observerar direkt (?) att VL$=[(1+t^2)y(t)]'$, så vi får

$$\begin{aligned}[(1+t^2)y(t)]' = \cos t \quad &\Leftrightarrow \quad (1+t^2)y(t) = \int \cos t \, dt \\ &\Leftrightarrow \quad (1+t^2)y(t) = \sin t + C \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{\sin t}{1+t^2} + \frac{C}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $C = 0$, och därmed

$$\boxed{y(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}}.$$

(*b*) Differentialekvationen är separabel. Vi har

$$\begin{aligned}(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2(1+y^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = 2\int \frac{1}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \arctan y(x) = 2\arctan x + C.\end{aligned}$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $C = 0$, så vi får

$$\arctan y(x) = 2\arctan x,$$

det vill säga

$$y(x) = \tan(2\arctan x) = \frac{2\tan(\arctan x)}{1-\tan^2(\arctan x)} = \boxed{\frac{2x}{1-x^2}},$$

där vi alltså utnyttjat formler för tangens dubbla vinkeln.

(3) Låt $M(t)$ beteckna mängden (i mg) benspyren efter tiden t (i minuter), $0 \leq t \leq 60$. Vi vet att $M(0) = 0$ och att rummets volym är $30\,m^3$. Tillförd mängd benspyren per minut är konstant och ges av $0.04 \cdot 0.1 = 0.004$ (mg/min). Den bortförda mängden benspyren är vid tidpunkten t momentant lika med

$$\frac{M(t)}{30} \cdot 0.02 = \frac{1}{1500} M(t)\,(mg/min).$$

Detta tillsammans innebär att vi har

$$M'(t) = 0.004 - \frac{1}{1500}M(t),$$

med lösningen

$$M(t) = 6 + Ce^{-t/1500}.$$

Vi vet att $M(0) = 0$, vilket ger $C = -6$, så

$$M(t) = 6(1-e^{-t/1500}).$$

Koncentrationen $c(t)$ (mg/m^3) ges nu av

$$c(t) = \frac{M(t)}{30} = \frac{1}{5}(1-e^{-t/1500}).$$

Vi ser att $c(t)$ är en växande funktion för $0 \leq t \leq 60$ (vilket ju dessutom känns logiskt och bra), så

$$c_{max} = c(60) = \frac{1}{5}(1-e^{-60/1500}) = \frac{1}{5}(1-e^{-1/25}) \approx 0.008\,mg/m^3.$$

Gränsvärdet kommer alltså inte att överskridas. Tur.