(1) Skärningspunkterna mellan kurvorna har x-koordinater $x = 0$ respektive $x = 1$. Man övertygar sig snabbt om att kurvan $y = x^{1/3}$ ligger över kurvan $y = x^3$, för $0 < x < 1$. Arean av området som begränsas av kurvorna ges alltså av

$$\int_0^1 (x^{1/3} - x^3)\, dx = \left[\frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(2) Vi skriver om ODE:n som $e^y y' = 4xe^{2x}$, och får alltså

$$\int e^y\, dy = \int 4xe^{2x}\, dx.$$

Vänsterledet blir e^y (vi struntar i konstanten) och högerledet partialintegreras:

$$\begin{aligned} \int 4xe^{2x}\, dx &= 4x(e^{2x}/2) - \int 4(e^{2x}/2)\, dx \\ &= 2xe^{2x} - e^{2x} + C. \end{aligned}$$

Vi har alltså att

$$e^{y(x)} = 2xe^{2x} - e^{2x} + C.$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $C = 2$, och alltså

$$\boxed{y(x) = \ln\left(2xe^{2x} - e^{2x} + 2\right)}.$$

(3) (a) Den karakteristiska ekvationen ges av $r^2 + 6r + 8 = 0$, med lösningar $r = -2$ och $r = -4$. Den homogena ekvationen har alltså lösningarna

$$\boxed{y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x}},$$

för godtyckliga konstanter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Vi ansätter $y_p(x) = A\sin x + B\cos x$ och får, efter insättning i ODE:n, att

$$\begin{aligned} (-A - 6B + 8A)\sin x + (-B + 6A + 8B)\cos x &= (7A - 6B)\sin x + (6A + 7B)\cos x \\ &= \sin x. \end{aligned}$$

Vi får alltså

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7A - 6B &=& 1 \\ 6A + 7B &=& 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} A &=& 7/85 \\ B &=& -6/85 \end{array}\right.$$

Alltså,

$$\boxed{y_p(x) = (7\sin x - 6\cos x)/85}$$

duger.

(c) Vi inför $z(x)$ genom $y(x) = z(x)e^{-2x}$. Då får vi $y'(x) = (z'(x) - 2z(x))e^{-2x}$ och $y''(x) = (z''(x) - 4z'(x) + 4z(x))e^{-2x}$. Om detta stoppas in i ODE:n så fås, efter förenkling och division med e^{-2x},

$$z''(x) + 2z'(x) = x.$$

Ansätt $z_p(x) = Ax^2 + Bx$, så fås

$$2A + 4Ax + 2B = x,$$

så vi väljer $A = 1/4$ och $B = -1/4$. Alltså, $z_p(x) = (x^2 - x)/4$ och därmed

$$\boxed{y_p(x) = (x^2 - x)e^{-2x}/4}.$$

(4) ODE:n är på den form då metoden med integrerande faktor lämpar sig bäst. Vi har $\int 2x\, dx = x^2$ (där vi skippar integrationskonstant som vanligt), och den integrerande faktorn är alltså e^{x^2}. Efter multiplikation med densamma får vi

$$\left(y(x)e^{x^2}\right)' = 1,$$

vilket ger

$$y(x)e^{x^2} = x + C.$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger direkt $C = 0$, och därmed

$$\boxed{y(x) = xe^{-x^2}}.$$

(5) Nämnaren ges av $p(x) = x^2 - 3x - 4 = ... = (x+1)(x-4)$, så vi gör partialbråkssönderläggningen

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{p(x)} &= \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \\ &= \frac{(A+B)x + (A-4B)}{p(x)}. \end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{cases} A+B &= 2 \\ A-4B &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 11/5 \\ B &= -1/5 \end{cases}$$

Vi har alltså att

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{p(x)}\,dx &= \frac{1}{5}\int \left(\frac{11}{x-4} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \boxed{\frac{1}{5}\left(11\ln|x-4| - \ln|x+1|\right) + C}. \end{aligned}$$

(6) Integralen vi ska räkna ut är $\pi\int_5^6 f(x)^2\,dx$. Vi partialintegrerar och gör livet något lättare för oss genom att använda att $(x-4)$ är en primitiv funktion till 1 (eftersom det passar bättre med problemet). Vi får

$$\begin{aligned} \pi\int_5^6 \ln(x-4)\,dx &= \pi\int_5^6 1\cdot\ln(x-4)\,dx \\ &= \pi[(x-4)\ln(x-4)]_5^6 - \pi\int_5^6 (x-4)\frac{1}{x-4}\,dx \\ &= 2\pi\ln 2 - \pi \\ &= \boxed{\pi(\ln 4 - 1)}. \end{aligned}$$

(7) Den allmänna lösningen till differensekvationen är

$$x_n = 3r^n + \frac{k}{r-1}(r^n - 1),$$

för $n = 0, 1, 2...$ (fallet $r = 1$ kan uteslutas direkt, eller hur!?). Vi vet att $x_1 = 4$, vilket ger

$$3r + \frac{k}{r-1}(r-1) = 4,$$

som är ekvivalent med att

$$3r + k = 4.$$

På samma sätt ger $x_3 = 10$ att

$$3r^3 + \frac{k}{r-1}(r^3-1) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 3r^3 + k(r^2+r+1) = 10.$$

Om vi substituerar $k = 4 - 3r$ i den andra ekvationen får vi

$$3r^3 + (4-3r)(r^2+r+1) = 10,$$

som efter förenkling ger

$$r^2 + r - 6 = 0.$$

Vi får alltså två lösningar, nämligen $\boxed{r = 2}$ och $\boxed{r = -3}$, som svarar mot $\boxed{k = -2}$ respektive $\boxed{k = 13}$. Den ena lösningen till differensekvationen blir alltså

$$x_n = 3\cdot 2^n - 2(2^n - 1) = \boxed{2^n + 2}.$$

Den andra blir

$$x_n = 3\cdot(-3)^n - \frac{13}{4}((-3)^n - 1) = \boxed{-\frac{1}{4}((-3)^n - 13)}.$$

(8) Vi börjar med att bestämma hur salthalten varierar i tank 1. Låt $x_j(t)$ beteckna mängden salt (i kg) i tank j efter tiden $t \geq 0$ (minuter). Vi vet att $x_1(0) = 1$ och att $x_2(0) = 0.5$. I tank 1 tillförs inget salt, så differentialekvationen blir

$$x_1'(t) = -\frac{x_1(t)}{10}\cdot 1,$$

med lösningen

$$x_1(t) = C_1 e^{-t/10}.$$

Villkoret $x_1(0) = 1$ ger $C_1 = 1$ och därmed

$$x_1(t) = e^{-t/10}.$$

För tank 2 blir problemet lite annorlunda. Här tillförs salt (från tank 1) och det bortförs salt. Differentialekvationen blir

$$x_2'(t) = \frac{x_1(t)}{10}\cdot 1 - \frac{x_2(t)}{20}\cdot 2,$$

vilket är ekvivalent med

$$x_2'(t) + \frac{1}{10}x_2(t) = \frac{1}{10}e^{-t/10}.$$

Den integrerande faktorn ges av (kontrollera) $e^{t/10}$ och efter multiplikation med denna övergår problemet till

$$\left(x_2(t)e^{t/10}\right)' = \frac{1}{10},$$

med lösning

$$x_2(t) = (C_2 + t/10)e^{-t/10}.$$

Villkoret $x_2(0) = 0.5$ ger $C_2 = 1/2$ och därmed

$$x_2(t) = \frac{1}{10}(5+t)e^{-t/10}.$$

Vi söker maximum av $x_2(t)$, $t \geq 0$. Sök nollställe till derivatan! Vi har

$$x_2'(t) = \frac{1}{10}(1-(5+t)/10)e^{-t/10} = \frac{1}{100}(5-t)e^{-t/10}.$$

Vi gör en teckentabell:

t	0		5	
x_2'	+	+	0	-
x_2	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$

Vi ser att x_2:s maximala värde antas då $\boxed{t = 5}$.