

Euklidisk geometri

Demonstration

1. Konstruera en triangel då två sidor och vinkeln mellan dem är givna.
2. Konstruera en triangel då tre sidor är givna.
3. Konstruera en triangel då en sida och vinklarna i dess ändpunkter är givna.
4. Konstruera en parallell linje till en given linje genom en given punkt.
5. Visa att bisektriserna till basvinklarna i en likbent triangel är lika långa.
6. Visa att motsvarande höjder i kongruenta trianglar är lika långa.
7. Visa att motstående sidor i en parallelogram är lika långa.
8. Visa att kateten som står mot vinkel $\frac{1}{3}R$ i en rätvinklig triangel är hälften så lång som hypotenusan i triangeln.
9. Given är en rätvinklig triangel där en av kateterna har längden 12 enheter och motstående vinkel är $\frac{2}{3}R$. Bestäm (längden av) höjden till hypotenusan.
10. Konstruera vinkel **(a)** $\frac{2}{3}R$; **(b)** $\frac{1}{3}R$.
11. Konstruera en romb då **(a)** sida och en vinkel; **(b)** höjd och en diagonal är givna.
12. Konstruera en sträckas **(a)** mittpunkt; **(b)** mittpunktsnormal.
13. Konstruera normalen till en linje genom en given punkt **(a)** utanför; **(b)** på linjen.
14. Konstruera bisektrisen till en given vinkel.
15. Konstruera en parallelogram då en sida och två diagonaler är givna.
16. Formulera och bevisa speciella likformighetsfall för **(a)** likbenta; **(b)** rätvinkliga trianglar.
17. Låt AP och BQ vara höjder i triangeln $\triangle ABC$ ($P \in BC, Q \in AC$). Visa att trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle PQC$ är likformiga.
18. Visa att höjderna i en triangel är bisektriser till vinklarna i triangeln med hörn fotpunkterna till höjderna i den givna triangeln.

19. Given är en romb $ABCD$. Den rätta linjen l genom A skär förlängningarna till BC och CD i punkter P resp. Q . Visa att $|AB|^2 = |BP| |DQ|$.

20. Given är en likbent triangel med baslängd 3 enheter och benlängd 6 enheter. En sträcka parallell med basen är lika lång som sträckan den skär av triangelns ben räknat från bashörnet. Bestäm sträckans längd.

21. Given är en rät linje l och punkter $A, B \in l$. Punkterna E och F är sådana att EA och FB är ortogonala mot l och F befinner sig på samma sida om l som E . Punkten C ligger på sträckan AB och är sådan att $\frac{|AC|}{|BF|} = \frac{|AE|}{|CB|}$. Visa att vinkel $\angle ECF$ är rät.

22. Givna är två trianglar med gemensam bas, lika höjder till den och som ligger på samma sida om basen. Den rätta linjen l är parallell med triangelarnas bas och skär deras återstående sidor. Visa att sträckorna, som de båda triangelarnas sidor skär av l , är lika långa.

23. Given är en likbent triangel med baslängd 12 och benlängd 10 (enheter). Beräkna avståndet från bisektrisernas skärningspunkt till triangelns topp (dvs hörnet som bildas av benen).

24. Dela en given sträcka i (a) tre; (b) n lika delar.

25. Given en sträcka med längden a , konstruera en sträcka med längden (a) $a\sqrt{2}$; (b) $a\sqrt{3}$; (c) $a\sqrt{n}$.

26. Givna är en cirkel och en punkt P innanför cirkeln. Bestäm mängden av mittpunkterna till alla kordor genom P .

27. Konstruera mängden av punkter från vilka en given sträcka syns under en given vinkel.

28. Konstruera en triangel som har givna en sida, motstående vinkel och (a) höjd; (b) median till den givna sidan.

29. Konstruera en rätvinklig triangel där den ena spetsiga vinkeln är $\frac{1}{3}R$ och medianen till hypotenusan är given.

30. Konstruera en rätvinklig triangel där hypotenusan och medianen till en av kateterna är givna.

31. Konstruera en triangel där två vinklar och radien till den inskrivna cirkeln är givna.

32. Givna är en cirkel och två (icke diametralt motsatta) punkter B och C på den. Tangenterna till cirkeln genom B och C skär varandra i punkten A . Tangenten genom en punkt på den mindre bågen BC skär AB och AC i K , resp. L . Om $|AC| = a$, bestäm triangeln $\triangle AKL$'s perimeter.

33. Visa att i en rätvinklig triangel är summan av diametrarna till den omskrivna och den inskrivna cirkeln lika med summan av de båda kateterna.

34. Konstruera en triangel med givna: (a) en sida, vinkeln i dess ena ändpunkt och radien till den inskrivna cirkeln; (b) en sida, höjden till en av de andra sidorna och radien till den inskrivna cirkeln; (c) en vinkel, höjden från samma hörn och radien till den inskrivna cirkeln; (d) en vinkel, höjden genom ett av de andra hörnen och radien till den omskrivna cirkeln.

35. Visa att i en godtycklig fyrhörning ligger diagonalernas mittpunkter och skärningspunkten mellan sträckorna, som sammanbinder sidornas mittpunkter, på en rät linje (= i linje).

36. Givna är triangeln $\triangle ABC$ och punkten P på den omskrivna cirkeln. Visa att fotpunkterna till normalerna från P till triangelns sidor ligger i linje.

37. Använd likformighet för att konstruera en rätvinklig triangel där en av de spetsiga vinklarna och radien till den inskrivna cirkeln är givna.

38. Konstruera en cirkel som tangerar en given cirkel och två givna räta linjer genom den givna cirkelns medelpunkt.

39. Given är en liksidig triangel $\triangle ABC$, inskriven i en cirkel. Punkten M ligger på den mindre bågen AB och är sådan att $|AM| = 8, |BM| = 7$. Bestäm $|CM|$.

40. Givna är sträckan AB , dess mittpunkt O och punkten M som ligger på sträckan AO . Normalen till AB genom M skär halvcirkelarna med diametrar AO resp. AB (och på samma sida om AB) i punkter C resp. D . Visa att $|AC|$ och $|AD|$ kan vara katetens och hypotenusans längder i en likbent rätvinklig triangel.

41. Givna är fyra sträckor med längderna a, b, c, d . Konstruera en sträcka med längden x där **(a)** $x = a + b$; **(b)** $x = a - b$; **(c)** $x = \frac{ab}{c}$; **(d)** $x = \sqrt{ab}$; **(e)** $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; **(f)** $x = \sqrt{a^2 - b^2}, b < a$; **(g)** $x = \sqrt{ab - cd}, ab > cd$; **(h)** $x = 2^{\frac{1}{4}}a$.

42. Givna är en cirkel och punkt utanför den. Konstruera en linje genom den givna punkten som skär cirkeln så att sträckan från punkten till cirkeln är lika lång som sträckan innanför cirkeln.

43. Konstruera en rätvinklig triangel där höjden till hypotenusan och **(a)** summan; **(b)** skillnaden av de båda kateterna är givna.

44. Given är den rätvinkliga triangeln $\triangle ABC$ med höjd till hypotenusan CD . Cirkeln med medelpunkt D och radie $|CD|$ skär kateten AC i punkten E och förlängningen till BC i punkten F . Visa att **(a)** E, D, F ligger i linje; **(b)** triangelarna $\triangle ABC$ och $\triangle FEC$ är likformiga; **(c)** punkterna A, E, B, F ligger på en cirkel.

45. Konstruera en fyrhörning där en sida och vinklarna i dess ändpunkter är givna om återstående tre sidor är lika långa.

46. Konstruera en liksidig triangel vars hörn ligger på tre givna parallella linjer och vars mittpunkt ligger på en given transversal till de parallella linjerna.

47. Låt CL vara bisektrisen till vinkeln C i triangeln $\triangle ABC$. Inför beteckningarna: $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a, |CL| = l_c, |AL| = m, |BL| = n$. Visa att $l_c^2 = ab - mn$.

48. Konstruera en triangel där två sidor och **(a)** höjden; **(b)** medianen; **(c)** bisektrisen från hörnet mellan dem är givna.

49. Given är den konvexa fyrhörningen $ABCD$ vars diagonaler skär varandra i punkten O . Låt S, S_1, S_2, S_3 vara areorna till $ABCD, \triangle AOD, \triangle AOB, \triangle COD$ och antag att de uppfyller $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_1}$. Visa att **(a)** AB och CD är parallella; **(b)** $S_1 \leq \frac{1}{4}S$. När uppnås likhet?

50. Given är en rätvinklig triangel. Visa att bisektrisen till den räta vinkeln även halverar vinkeln mellan höjden och medianen från samma hörn.

51. Konstruera en triangel som har tre **(a)** höjder; **(b)** medianer givna.

OBS! Det går inte att med hjälp av passare och linjal konstruera en triangel som har tre givna bisektriser.

52. Konstruera en triangel som har höjd, bisektris och median genom samma hörn givna.

Konstruktionerna skall utföras med hjälp av (låsbar) passare och linjal.