

Inlämningsuppgift 1

1. Utveckla polynomet g med polynomet f där

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$g(x) = x^{11} + 7x^8 - x^7 + 3x^5 + 2x^4 - x - 1.$$

2. Partialbråksuppdelning av det rationella uttrycket

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 16x + 8}$$

i $\mathbf{Q}[x]$.

3. Vilka av följande element är inverterbara i ringen $\mathbf{Q}[x]/x^3 - 4x - 3$?

- (a) $x + 1$,
- (b) $x - 1$,
- (c) $x^2 - x$.

Bestäm inversen i förekommande fall.

4. Vilken eller vilka av följande ringar är kroppar?

- (a) $\mathbf{Q}(\alpha)$, där $\alpha^2 - 6\alpha + 7 = 0$,
- (b) $\mathbf{R}(\alpha)$, där $\alpha^2 - 6\alpha + 7 = 0$,
- (c) $\mathbf{Z}/1919$,
- (d) $\mathbf{C}[x]/x^2 + 1$.

Lösningar

1. Vi använder divisionsalgoritmen som säger att $g = k_1f + f_0 = (k_2f + f_1)f + f_0 = k_2f^2 + f_1f + f_0 = k_3f^3 + f_2f^2 + f_1f + f_0 = \dots$ där vi slutar när vi får en rest som har lägre grad än f . Här får vi

- $g(x) = (x^3 + 3x^2 - 4)(x^8 - 3x^7 + 9x^6 - 16x^5 + 35x^4 - 69x^3 + 146x^2 - 296x + 612) - 1252x^2 - 1185x + 2447$,
- $x^8 - 3x^7 + 9x^6 - 16x^5 + 35x^4 - 69x^3 + 146x^2 - 296x + 612 = (x^3 + 3x^2 - 4)(x^5 - 6x^4 + 27x^3 - 93x^2 + 290x - 831) + 2267x^2 + 864x - 2712$,
- $x^5 - 6x^4 + 27x^3 - 93x^2 + 290x - 831 = (x^3 + 3x^2 - 4)(x^2 - 9x + 54) - 251x^2 + 254x - 615$.

Således är svaret att $g(x) = 1252x^2 - 1185x + 2447 + (2267x^2 + 864x - 2712)f(x) + (-251x^2 + 254x - 615)f^2(x) + (x^2 - 9x + 54)f^3(x)$.

2. Vi faktorerar nämnaren i en produkt av irreducibla polynom: $x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 16x + 8 = (x-2)^2(x^2 + 6x + 2)$ (Observera att $x^2 + 6x + 2$ har nollställena $-3 \pm \sqrt{7}$, men att dessa ej ligger i $\mathbf{Q}$. Vi kan verifiera att rationella nollställen saknas genom att konstatera att ± 1 och ± 2 inte duger.)

Enligt den allmänna partialbråksuppdelningsformeln ansätter vi:

$$r(x) := \frac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 16x + 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 6x + 2}$$

där A, B, C och D ska vara rationella konstanter. Genom att återföra till gemensamt bråkstreck får vi att:

$$r(x) = \frac{A(x^3 + 4x^2 - 10x - 4) + B(x^2 + 6x + 2) + C(x^3 - 4x^2 + 4x) + D(x^2 - 4x + 4)}{x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 16x + 8}$$

så genom identifiering av koefficienter får vi ekvationerna $A + C = 1$, $4A + B - 4C + D = 1$, $-10A + 6B + 4C - 4D = -2$ och $-4A + 2B + 4D = 1$ ur vilka vi löser att $A = B = C = D = 1/2$. Svaret blir alltså att

$$r(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x+1}{x^2 + 6x + 2} \right).$$

3. Låt oss bärja med att faktorisera polynomet vi räknar modulo mot: $x^3 - 4x - 3 = (x+1)(x^2 - x - 3)$. Att $x^2 - x - 3$ är irreducibelt ser vi genom att varken ± 1 eller ± 3 är nollställen.

- (a) $x+1$ är inte relativt primt med $x^3 - 4x - 3$ då det ju finns den gemensamma faktorn $x+1$. Därför är $x+1$ inte inverterbart.
- (b) $x-1$ saknar gemensam faktor med $x^3 - 4x - 3$ så dessa två polynom är relativt prima och därför är $x-1$ inverterbart. Vi ansätter inversen till $Ax^2 + Bx + C$ och ska då ha

$$\begin{aligned} (x-1)(Ax^2 + Bx + C) &= Ax^3 + (B-A)x^2 + (C-B)x - C \\ &= (B-A)x^2 + (4A+C-B)x + 3A-C = 1 \end{aligned}$$

vilket leder till ekvationerna $B-A=0$, $4A+C-B=0$ och $3A-C=1$. Lösningen till detta ekvationssystem är $A=B=1/6$, $C=-1/2$ så $(x-1)^{-1} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$.

- (c) $x^2 - x = x(x-1)$ är relativt primt med $x^3 - 4x - 3$ och är därför inverterbart. För att göra det hela lite enklare kan vi utnyttja att inversen av en produkt är produkten av inverserna, så att $(x^2-x)^{-1} = x^{-1}(x-1)^{-1}$. Genom ansättning av x^{-1} till $Ax^2 + Bx + C$ kommer vi på samma sätt som ovan till att $x^{-1} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}$, så $(x^2-x)^{-1} = \frac{1}{18}(x^2+x+3)(x^2-4) = \frac{1}{6}(-x^2+x+5)$.

4. (a) Kropp, ty $\alpha^2 - 6\alpha + 7$ är irreducibelt då ju varken ± 1 eller ± 7 är nollställen.
- (b) Ingen kropp, ty $\alpha^2 - 6\alpha + 7$ har de reella nollställen $3 \pm \sqrt{2}$ och är därför reducibelt.
- (c) Ingen kropp, ty $1919 = 19 \cdot 101$ är inget primtal.
- (d) Ingen kropp; endast polynom av grad 1 är irreducibla i $\mathbf{C}[x]$.