

Inlämningsuppgift 2

- Bestäm samtliga nollställen till polynomet $f(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 2x + 5 \in \mathbf{Z}/11[x]$.
- Lös följande linjära ekvationssystem där $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_5 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 10x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

- Definiera en så liten kropp, L , som möjligt som innehåller K och är sådan att $f \in K[x]$ faktorerar i polynom av grad 1 i $L[x]$ om
 - $K = \mathbf{Q}$ och $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x + 1$,
 - $K = \mathbf{Z}/3$ och $f(x) = x^3 + 2x + 1$.
- Polynomen $f(x) = x + 4$ och $g(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ har koefficienter i $\mathbf{Z}/5$. Utveckla g med f .

Lösningar

- Vi har att

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 2x + 5 = (x - 1)(x^3 + 6x^2 + 4x + 6) \\ &= (x - 1)(x - 3)(x^2 + 9x + 9) = (x - 1)(x - 3)(x - 6)(x - 7). \end{aligned}$$

Således är nollställena 1, 3, 6 och 7.

- Ekvationssystemet svarar mot $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $\mathbf{b} = (4, 1, 5)$ och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & 10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi löser via radoperationer på den utökade koefficientmatrisen $(A|\mathbf{b})$:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -7 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -7 & 10 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{51}{28} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{51}{28} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{47}{28} & -\frac{7}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Av detta kan vi avläsa att ett exempel på lösning är:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_4 - \frac{51}{28}x_5 - \frac{7}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2}x_4 + \frac{51}{28}x_5 + \frac{3}{4} \\ x_3 = \frac{3}{2}x_4 - \frac{47}{28}x_5 - \frac{7}{4} \end{cases}$$

där x_4 och x_5 kan väljas godtyckligt i $\mathbf{R}$.

3. (a) Vi har att

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 - x - 1)$$

vilket är en faktorisering i irreducibla polynom ty de två andragsuttrycken saknar rationella nollställen; ± 1 duger ej. Nu "uppfinner" vi ett nollställe till det högra av dessa genom att utvidga $\mathbf{Q}[x]$ till kroppen $\mathbf{Q}(\alpha)[x]$ där $\alpha^2 = \alpha + 1$. Då blir $x^2 - x - 1 = (x - \alpha)(x + \alpha - 1)$. Nu är frågan om även $x^2 - 2x + 1$ faktorerar sig här, dvs om det finns nollställen även till detta polynom i den nya större kroppen. I så fall ska vi ha $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 - 2 = 0$ så genom att sätta $y = x - 1$ blir frågan om det finns någon lösning till ekvationen $y^2 = 2$. Vi provar genom att ansätta $y = A\alpha + B$ och får då att $y^2 = (2AB + A)\alpha + B^2 + A^2$ och genom identifiering av koefficienter får vi

$$\begin{cases} A & +2AB & = 0 \\ A^2 & +B^2 & = 2 \end{cases}$$

För att den övre av dessa ekvationer ska vara satisfierad krävs antingen att $A = 0$ eller att $A = -2B$. Men om $A = 0$ får vi $B^2 = -2$ vilket är en omöjlighet då B ska vara rationell, och om $A = -2B$ får vi $B^2 = 2/5$ vilket inte heller fungerar.

Vi utvidgar nu kroppen en gång till och får $\mathbf{Q}(\alpha)(\beta)[x]$ där $\alpha^2 = \alpha + 1$ och $\beta^2 = 2\beta + 1$ vilket blir vår slutliga kropp, ty nu har vi

$$f(x) = (x - \alpha)(x + \alpha - 1)(x - \beta)(x + \beta - 2).$$

(b) Här har vi att polynomet $f(x) = x^3 + 2x + 1$ ligger i $(\mathbf{Z}/3)[x]$. Genom provning ser vi snabbt att f saknar nollställen så vi inför kroppen $(\mathbf{Z}/3)(\alpha)[x]$ där $\alpha^3 = \alpha + 2$ och får från Sats 6.18 att $f(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^3)(x - \alpha^9) = (x + 2\alpha)(x + 2\alpha + 2)(x + 2\alpha + 1)$.

4. Precis som vid utveckling av polynom med rationella koefficienter med ett annat använder vi divisionsalgoritmen: $g = k_0f + f_0 = k_1f^2 + f_1f + f_0 = k_2f^3 + f_2f^2 + f_1f + f_0 = \dots$ där vi slutar när graden av k_i är lägre än graden av f . Här är $f = x + 4$ och $g = x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ och båda ligger i $(\mathbf{Z}/3)[x]$. Vi har

$$g = (x + 4)(x^2 + 2)$$

$$x^2 + 2 = (x + 4)(x + 1) + 3$$

$$x + 1 = 1(x + 4) + 2$$

och vi får alltså att $g = f^3 + 2f^2 + 3f$.