

Inlämningsuppgift 3

1. Är följande matriser med element i $\mathbf{Z}/7$ inverterbara? Bestäm i förekommande fall inversen.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

har element i $\mathbf{Z}/5$. Bestäm två egenvärden med tillhörande egenvektorer till A . Det är tillåtet att om nödvändigt utvidga $\mathbf{Z}/5$ till en större kropp. Vad blir A^{16} ?

3. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 24 & 1 \end{bmatrix}$$

har element i $\mathbf{Q}$. Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$. Vilken rang har A ?

4. Beräkna summan $\sum_{i=0}^n i^3$.

Lösningar

1. Matrisen i fråga är radekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som har rang < 2 och således inte är inverterbar.

I del (b) prövar vi om matrisen i fråga, som vi kan kalla A , är inverterbar genom att göra radoperationer på $(A|I)$, dvs på

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Om man håller tungan rätt i mun och räknar rätt landar man då på

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

och man ser dels att A är inverterbar, dels att A^{-1} ges av

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. För att bestämma egenvärden ska vi bestämma λ så att $A - \lambda I$ är singulär. Nu är ju

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

som genom att lägga $\lambda - 4$ av den nedre raden till den övre och sedan byta plats på raderna överförs till

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 - \lambda \\ 0 & 2 - (4 - \lambda)^2 \end{bmatrix}.$$

Denna matris är singulär om och endast om $(\lambda - 4)^2 = 2$. Men ekvationen $y^2 = 2$ saknar ju lösning i $\mathbf{Z}/5$ så vi får istället räkna i en utvidgad kropp, till exempel $\mathbf{Z}/5(\alpha)$ där $\alpha^2 = 2$. Då får vi $\lambda = 4 \pm \alpha$ som är våra egenvärden.

För att nu bestämma egenvektorer till ett egenvärde λ gäller det att bestämma en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ och denna ekvation löser vi med Gausseliminering av $A - \lambda I$. Härvid utnyttjar vi förstås det arbete vi redan gjort när vi eliminerade denna matris för att finna egenvärdena. Vi har att

$$A - (4 + \alpha)I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ur vilket vi avläser att $(A - (4 + \alpha)I)\mathbf{x} = 0$ betyder att $\mathbf{x} = x_2(\alpha, 1)$ och att t.ex. $(\alpha, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet $4 + \alpha$. Vi har också att

$$A - (4 - \alpha)I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och ur detta läser vi på samma sätt att t.ex. $(-\alpha, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet $4 - \alpha$.

Vi har nu kommit fram till att A kan skrivas som CDC^{-1} där

$$D = \begin{bmatrix} 4 + \alpha & 0 \\ 0 & 4 - \alpha \end{bmatrix} \text{ och } C = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

När vi nu ska beräkna A^{16} vill vi förstås utnyttja diagonaliseringen genom att observera att $A^{16} = CD^{16}C^{-1}$. Då behöver vi först räkna ut vad C^{-1} är och genom att till exempel utnyttja formeln för invers till en 2×2 -matris ser vi att

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha & 3 \\ \alpha & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi behöver också D^{16} . Men

$$D^{16} = \begin{bmatrix} (4 + \alpha)^{16} & 0 \\ 0 & (4 - \alpha)^{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha + 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha + 2 \end{bmatrix}.$$

Genom att multiplicera ihop kommer vi fram till att

$$A^{16} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Vi bestämmer nollrummet genom att lösa ekvationssystemet $A\mathbf{x} = 0$ och detta gör vi genom Gausseliminering av A :

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 56 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi avläser att $\mathbf{x} = (3x_3 - 56x_4, -x_3 + 16x_4, x_3, x_4, 0) = x_3(3, -1, 1, 0, 0) + x_4(-56, 16, 0, 1, 0)$ där x_3 och x_4 kan väljas godtyckligt och en bas för $N(A)$ utgörs till exempel av de två vektorerna $(3, -1, 1, 0, 0)$ och $(-56, 16, 0, 1, 0)$. Rangén av matrisen A är per definition antal pivotelement i reducerad trappstegsform som i detta fall är 3. Detta stämmer också väl överens med dimensionssatsen som säger att rangén plus dimensionen av nollrummet blir antal kolonner i matrisen.

4. Den sökta summan är koefficienten framför x^n i potensserien $f(x)u(x)$ där $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i^3 x_i$. Nu är ju

$$\begin{aligned} i^3 &= (i+3)(i+2)(i+1) - 6i^2 - 11i - 6 = 6\binom{i+3}{3} - 6(i+2)(i+1) + 7i + 6 \\ &= 6\binom{i+3}{3} - 12\binom{i+2}{2} + 7(i+1) - 1 \end{aligned}$$

och det följer att $f(x)$ kan skrivas som $6u(x)^4 - 12u(x)^3 + 7u(x)^2 - u(x)$. Därför har vi att $f(x)u(x) = 6u(x)^5 - 12u(x)^4 + 7u(x)^3 - u(x)^2$ och ur detta drar vi slutsatsen att $\sum_{i=0}^n i^3 = 6\binom{n+4}{4} - 12\binom{n+3}{3} + 7\binom{n+2}{2} - n - 1$, som, om man vill, kan förenklas till $n^4/4 + n^3/2 + n^2/4$.