

Tentamen i MAN011 Aritmetik och algebra, del 2, 000606, kl. 8.45-13.45

1. Låt K vara en kropp och låt f och g vara två polynom i $K[x]$.
 - (a) Vad betyder det att ett polynom $d \in K[x]$ är en största gemensam delare till f och g ?
 - (b) Visa att en största gemensam delare d existerar och att $\exists a, b \in K[x] : d = af + bg$.
2. Låt K vara en kropp och tag $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in K[[x]]$. Visa att om $a_0 \neq 0$ gäller att $f(x)$ är en inverterbar potensserie.
3. Låt f vara ett polynom i ringen $K[x]$ där K är en kropp. Visa att för $\beta \in K$ gäller att $x - \beta \mid f$ om och endast om β är ett nollställe till polynomfunktionen $f(x)$.
4. Är polynomet $f(x) = x^3 + 9x^2 + 29x + 33 \in \mathbf{Q}[x]$ irreducibelt? Är $x + 2$ inverterbart i $\mathbf{Q}[x]/f(x)$? Bestäm i så fall inversen.
5. Följande matris, A , har element i $\mathbf{Z}/7$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm två matriser C och D så att D är diagonal och $A = CDC^{-1}$. Utvidga om nödvändigt $\mathbf{Z}/7$ till en större kropp. Vad blir A^n ?

6. Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\mathbf{Q}$ ges av

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \end{cases}$$

Är följden periodisk? Om så är fallet, vilken period har den?

7. Är de tre vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = (2, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 2, 1)$$

linjärt oberoende om

- (a) elementen ligger i $\mathbf{Q}$?

(b) elementen ligger i $\mathbf{Z}/3$?

I de eventuella fall detta inte gäller, skriv $\mathbf{v}_3$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

8. Betrakta en triangel med hörnen A , B och C .

- (a) Hur många vägar av längd n finns det från A till B ? (Med en väg av längd n menas en följd av n st. hopp där man i varje hopp flyttar från det hörn man befinner sig i till ett av de två andra.)
- (b) Antag att en partikel gör en s.k. slumpvandring på triangeln, dvs en gång per sekund gör den ett hopp från det hörn där den befinner sig till ett på måfå valt annat hörn. Om partikeln vid tiden $t = 0$ befinner sig i hörn A , vad är då sannolikheten att den vid tiden $t = n$ befinner sig i hörn B ?

Telefonvakt under tentamen är Fredrik Engström som kan sökas på telefon 0740-459022.

Efter skrivtidens slut finns förslag till lösningar på kursens hemsida. Skrivningen beräknas vara färdiggrättad fredagen den 16 juni. Vardagar efter kl 14.00 kan man få reda på resultat på telefon 7723509.

Lösningar

- 1. Boken sid. 129.
- 2. Boken sid. 201-202.
- 3. Boken sid. 124.
- 4. Nej, $f(x)$ är inte irreducibelt ty

$$f(x) = (x + 3)(x^2 + 6x + 11).$$

Vi observerar att dessa faktorer dock är irreducibla och vi ser av det att $x + 2$ är relativt primt med $f(x)$ och därmed inverterbart i $\mathbf{Q}[x]/f(x)$. Inversen beräknar vi exempelvis med hjälp av divisionsalgoritmen:

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 29x + 33 = (x + 2)(x^2 + 7x + 15) + 3$$

varur det följer att

$$(x+2)(x^2+7x+15) \equiv -3 \pmod{f(x)}$$

och således att

$$(x+2)^{-1} = -\frac{1}{3}(x^2+7x+15).$$

5. Först bestämmer vi egenvärdena till A :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5-\lambda \\ 0 & 3-(\lambda-3)(\lambda-5) \end{bmatrix}$$

som är singulär om och endast om $3-(\lambda-3)(\lambda-5) = 0$. Men $3-(\lambda-3)(\lambda-5) = 2+\lambda-\lambda^2 = 6(\lambda^2+6\lambda+5) = 6((\lambda+3)^2-4) = 6(\lambda+1)(\lambda+5) = 0$ då $\lambda = 2$ eller $\lambda = 6$ så egenvärdena är 2 och 6.

Härnäst bestämmer vi egenvektorer:

$$A - 2I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och vi ser att en egenvektor till egenvärdet $\lambda = 2$ är t.ex. $(4, 1)$.

$$A - 6I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och vi ser att en egenvektor till egenvärdet $\lambda = 6$ är t.ex. $(1, 1)$.

Vi kan alltså skriva $A = CDC^{-1}$ där

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

För att slutligen bestämma A^n med hjälp av vår diagonalisering behöver vi veta C^{-1} :

$$C^{-1} = (4-1)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi:

$$A^n = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)^n - 2^{n+3} & (-1)^n + 2^{n+3} \\ 2(-1)^n - 2^{n+1} & (-1)^n + 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

6. Om följderna är periodiska med period k gäller att k är det minsta positiva heltal sådant att $(1 - x^k)f(x)$ är ett polynom av grad $\leq k - 1$, där $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Låt nu $p(x)$ vara det till följderna associerade polynomet, dvs $p(x) = x^2 - x + 1$. Då har vi att $p(x)f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1 + x$ så att

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2-x+1}$$

och

$$(1 - x^k)f(x) = \frac{(1+x)(1-x^k)}{x^2-x+1}.$$

Eftersom $x^2 - x + 1$ är irreducibelt gäller att denna kvot är ett polynom bara då $x^2 - x + 1 \mid 1 - x^k$ dvs den eventuella perioden är det minsta k så att $x^k \equiv 1 \pmod{x^2 - x + 1}$. Med räkning modulo $x^2 - x + 1$ får vi att $x^2 = x - 1$, $x^3 = x^2 - x = -1$, $x^4 \neq 1$, $x^5 \neq 1$, $x^6 = 1$.

Svaret är alltså: Ja, följderna är periodiska med period 6.

(Mycket riktigt blir följderna: $1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, -2, -1, \dots$)

7. Vi ska pröva om ekvationen $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = 0$ har en lösning där ej alla λ_i är 0, dvs om $A\mathbf{x} = 0$ har en lösning $\mathbf{x} \neq 0$ där $\mathbf{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ och $A = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3]$. Vi använder Gausseliminering av A och får i (a):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och ser att vi får tre pivotelement och att den enda lösningen är $\mathbf{x} = 0$ och därmed att de tre vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende. Ifallet (b) däremot är sista raden i mellanledet ovan densamma som den andra raden och kan alltså bytas ut mot en rad med nollor. Därmed är vektorerna inte linjärt oberoende; vi ser att ekvationen $[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]\mathbf{x} = \mathbf{v}_3$ har lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ och således att $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$.

8. För att lösa (a) observerar vi att antalet vägar från A till B är lika många som antalet vägar från A till C av samma längd. Om vi nu låter $a_n(x, y)$ beteckna antalet vägar från x till y av längd n (där $x, y \in \{A, B, C\}$) har vi alltså att

$$a_n(A, B) = a_{n-1}(A, A) + a_{n-1}(A, C)$$

$$\begin{aligned}
&= a_{n-2}(A, B) + a_{n-2}(A, C) + a_{n-1}(A, C) \\
&= a_{n-1}(A, B) + 2a_{n-2}(A, B).
\end{aligned}$$

Genom att sätta $b_n = a_n(A, B)$ har vi alltså fått rekursionen:

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} \\ b_0 = 1, b_1 = 2 \end{cases}$$

Karaktäristiskt polynom för denna rekursion är $x^2 - x - 2$ som har nollställena -1 och 2 så lösningen är $D(-1)^n + E2^n$ och från begynnelsevärdena får vi att $D = -1/3$ och $E = 1/3$. Svaret är alltså att

$$b_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n).$$

För del (b) observerar vi att det finns totalt 2^n olika vägar av längd n och enligt uppgift är var och en lika sannolik, så den sökta sannolikheten är

$$\frac{\frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)}{2^n} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right).$$

(Obs. att uttrycket närmar sig $1/3$ då n växer, precis som sig bör.)

Som alternativ i del (a) kan man betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som på ett uppenbart sätt betecknar antalet vägar av längd 1 mellan olika hörn och observera att A^n anger antal vägar av längd n på motsvarande sätt. Man kan nu beräkna A^n genom diagonalisering.