

Tentamen i MAN011 Aritmetik och algebra, del 2, 000821, kl. 8.45-13.45

1. Låt f vara ett polynom i ringen $K[x]$ där K är en kropp. Visa att för $\beta \in K$ gäller att $x - \beta | f$ om och endast om β är ett nollställe till polynomfunktionen $f(x)$.
2. Låt A vara en matris med koefficienter i en kropp K . Antag att egenvektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ hör till olika egenvärden till A . Visa att dessa egenvektorer då är linjärt oberoende.
3. Låt K vara en kropp och tag $f, g \in K[x]$. Visa att g är inverterbart i $K[x]/f$ om och endast om f och g är relativt prima.
4. Bestäm inversen till potensserien $f(x) = 2 + x + x^2 + x^3 + \dots \in \mathbf{Q}[[x]]$.
5. Visa att polynomet $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 \in \mathbf{Q}[x]$ är irreducibelt och beräkna inversen till $g(x) = x - 3$ i $\mathbf{Q}[x]/f(x)$.
6. Följande matris, A , har element i $\mathbf{Z}/7$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm två matriser C och D så att D är diagonal och $A = CDC^{-1}$. Utvidga om nödvändigt $\mathbf{Z}/7$ till en större kropp. Vad blir A^n ?

7. Bestäm en så liten kropp som möjligt som innehåller $\mathbf{Z}/5$ så att $p(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ faktoriserar som en produkt av polynom av grad 1 i $K[x]$.
8. Antag att en enkönad population utvecklar sig på följande sätt: Varje individ får vid ett års ålder två barn, vid två års ålder ytterligare ett barn, samt dör under sitt tredje levnadsår. Antag att vid tiden 0 föds en individ som vi betraktar som "urmoder" för en ny population.
 - (a) Hur många individer föds vid tiden n år efter urmoderns födelse i den nya population?
 - (b) Hur många levande individer finns det i populationen vid samma tidpunkt som i (a)?

Lösningar

1. Boken sid. 124.

2. Boken sid. 185.
3. Boken sid. 135.
- 4.

$$\begin{aligned}
 f(x)^{-1} &= \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2+x+x^2+\dots} \\
 &= \frac{1}{1+u(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{2-x} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{1}{2} u\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \dots
 \end{aligned}$$

5. De enda möjliga rationella nollställena till $f(x)$ är ± 1 och inget av dessa fungerar. Således saknar f faktor av grad 1 och det återstår att visa att faktor av grad 2 saknas. Vi prövar detta genom att ansätta $f(x) = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$ vilket leder till ekvationerna $A+C=1$, $AC+B+D=3$, $AD+BC=1$ och $BD=1$. Eftersom ett polynom är irreducibelt i $\mathbf{Q}[x]$ om det är irreducibelt i $\mathbf{Z}[x]$ räcker det att leta efter heltalslösningar. Vi måste då antingen ha $B=D=1$ vilket leder till $AC=1$ vilket inte går ihop med att $A+C=1$, eller $B=D=-1$ vilket leder till $A+C=-1$ vilket inte heller går ihop med $A+C=1$. Således saknas även faktor av grad 2 och $f(x)$ är därmed irreducibelt.

För att beräkna inversen till $x-3$ kan vi använda divisionsalgoritmen:

$$f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = (x-3)(x^3 + 4x^2 + 15x + 46) + 139$$

så att $-\frac{1}{139}(x^3 + 4x^2 + 15x + 46)(x-3) \equiv 1 \pmod{f(x)}$, dvs $(x-3)^{-1} = -\frac{1}{139}(x^3 + 4x^2 + 15x + 46)$.

6. Bestäm först egenvärdena till A , dvs λ så att $A - \lambda I$ är singulär. Vi har

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

som via radoperationer bringas till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 4-5\lambda \\ 0 & 3+(4-5\lambda)(\lambda-3) \end{bmatrix}$$

som är singulär precis då

$$3 + (4 - 5\lambda)(\lambda - 3) = 5 - 5\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

dvs då $\lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - 4)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 3$. Denna ekvation saknar lösning i $\mathbf{Z}/7$. Låt oss då införa t.ex. kroppen $\mathbf{Z}/7(\alpha)$ där $\alpha^2 = 3$. Ekvationen får då lösningarna $\lambda = 4 \pm \alpha$ som alltså är egenvärdena.

För att nu diagonalisera A behöver vi veta egenvektorer till dessa egenvärden, dvs vi ska lösa ekvationerna $A - (4 \pm \alpha)\mathbf{x} = 0$. Detta ger oss till exempel egenvektorer $(5\alpha + 2, 1)$ och $(2\alpha + 2, 1)$ till $4 + \alpha$ respektive $4 - \alpha$. Vi får $A = CDC^{-1}$ och $A^n = CD^nC^{-1}$ där $D = \text{diag}(4 + \alpha, 4 - \alpha)$ och

$$C = \begin{bmatrix} 5\alpha + 2 & 2\alpha + 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Genom inspektion ser vi att $p(x)$ saknar nollställen i $\mathbf{Z}/5$ och genom ansättningen $p(x) = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$ ser vi snabbt att även faktorer av grad 2 saknas. Alltså är $p(x)$ irreducibelt.

Inför nu kroppen $\mathbf{Z}/5(\alpha)$ där $\alpha^4 = 3\alpha + 2$. Då är α , $-\alpha$, α^5 och $-\alpha^5$ nollställen och vi har att $p(x) = (x + \alpha)(x - \alpha)(x + 3\alpha^3 + 2\alpha)(x + 2\alpha^3 + 3\alpha)$.

8. Låt a_n vara antalet individer som föds vid tiden n . Enligt uppgift gäller då rekursionen:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2$$

med begynnelsevärdena $a_0 = 1$ och $a_1 = 2$. Denna rekursion har karaktäristiskt polynom $x^2 - 2x - 1$ som har nollställena $1 \pm \sqrt{2}$, så en formel för a_n är

$$a_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n$$

där A och B är konstanter som vi med hjälp av begynnelsevärdena bestämmer till $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}}$ respektive $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{8}}$. Svaret i (a) blir alltså:

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)(1 + \sqrt{2})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)(1 - \sqrt{2})^n.$$

För del (b) observerar vi att det som söks är $a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$ som blir

$$\left(4 + \frac{11}{\sqrt{8}}\right)(1 + \sqrt{2})^{n-2} + \left(4 - \frac{11}{\sqrt{8}}\right)(1 - \sqrt{2})^{n-2}.$$