

Tentamen i MAN011 Aritmetik och algebra, del 2, 010113, kl. 8.45-13.45

1. Låt A vara en matris med koefficienter i en kropp K . Visa att om egenvektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ hör till olika egenvärden till A så är $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ linjärt oberoende. (3p)
2. Låt K vara en kropp och tag $f(x) \in K[x]$. Visa att för $g(x) \in K[x]/f(x)$ gäller att $g(x)$ är inverterbart om och endast om $f(x)$ och $g(x)$ är relativt prima. (3p)
3. Antag att $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ är relativt prima, att $f \in \mathbb{Q}[x]$ och att $\text{grad}(f) < \text{grad}(g)$. Visa att det finns polynom $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ sådana att $\text{grad}(a) < \text{grad}(g)$ eller $a = 0$, $\text{grad}(b) < \text{grad}(h)$ eller $b = 0$ och

$$\frac{f}{gh} = \frac{a}{g} + \frac{b}{h}. \quad (3p)$$

4. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

har element i $\mathbb{Z}/7$. Bestäm en diagonal matris D och en inverterbar matris C sådana att $A = CDC^{-1}$. Utvidga om nödvändigt $\mathbb{Z}/7$ till en större kropp. Beräkna A^{247} . (3p)

5. Visa att $\mathbb{Q}[\alpha]$ där $\alpha^4 = 3\alpha - 1$ är en kropp och bestäm inversen till $\alpha - 1$ i denna kropp. (3p)
6. Beräkna produkten av de två potensserierna $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+3)x^i$ och $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i^2 - 1)x^i$. (3p)
7. Bestäm en så liten kropp K som möjligt som innehåller $\mathbb{Q}$ och är sådan att polynomet $x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 3$ faktorerar som en produkt av polynom av grad 1 i $K[x]$. (3p)
8. Beräkna summan

$$\sum_{i=0}^n (i+1)(n-i)3^{-i}4^{i-n}. \quad (4p)$$

Telefonvakt under tentamen är Fredrik Engström som kan sökas på telefon 0740-350646.

Efter skrivtidens slut finns förslag till lösningar på kursens hemsida. Skrivningen beräknas vara färdiggrättad fredagen den 26 januari. Vardagar efter kl 14.00 kan man få reda på resultat på telefon 7723509.

Lösningar

1. Sid. 185-186.
2. Sid. 135.
3. Sid. 90.
4. Vi bestämmer först A 's egenvärden genom att kontrollera för vilka λ som matrisen $A - \lambda I$ är singulär.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 1 & 6 - \lambda \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 - \lambda \\ 0 & 4 + (\lambda - 2)(6 - \lambda) \end{bmatrix}$$

är singulär då $4 + (\lambda - 2)(6 - \lambda) = 4 - 5 - \lambda^2 + \lambda = 0$, dvs då $\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (\lambda + 3)^2 - 1 = 0$, dvs då $\lambda \in \{3, 5\}$.

Vi bestämmer nu A 's egenvektorer genom att för vart och ett av de två egenvärdena λ_i lösa ekvationssystemet $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = 0$.

$$A - 3I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så att $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$ är ekvivalent med att $x_1 + 3x_3 = 0$ och det följer att $(4, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet 3. Vidare gäller att

$$A - 5I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så att $(A - 5I)\mathbf{x} = 0$ är ekvivalent med att $x_1 + x_2 = 0$ och vi har att $(6, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet 5.

Alltså kan vi skriva $A = CDC^{-1}$ där

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

och

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

För att nu beräkna A^{247} utnyttjar vi att $A^{247} = CD^{247}C^{-1}$ och eftersom $6|246$ gäller att $3^{247} = 3$ och $5^{247} = 5$ och därmed att $D^{247} = D$ och således att $A^{247} = A$.

5. Vi ska visa att polynomet $f(\alpha) = \alpha^4 - 3\alpha + 1$ är irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$. Faktor av grad ett saknas enligt faktorsatsen ty de enda möjliga rationella nollställena är ± 1 och inget av dessa fungerar. Om faktor av grad 2 fanns skulle vi ha

$$f(\alpha) = (\alpha^2 + A\alpha + B)(\alpha^2 + C\alpha + D)$$

vilket leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + C & = 0 \\ AC + B + D & = 0 \\ AD + BC & = -3 \\ BD & = 1 \end{cases}$$

Eftersom f är ett primitivt polynom räcker det att visa att ekvationssystemet saknar heltalslösningar. Men en heltalslösning till den fjärde ekvationen innebär att $B = D = 1$ eller $B = D = -1$. I det första fallet leder detta enligt den tredje ekvationen att $A + C = 3$ och i det andra fallet till att $A + C = -3$. Bägge dessa fall är alltså oförenliga med den första ekvationen.

Låt oss nu bestämma $(\alpha - 1)^{-1}$. Vi observerar att

$$\alpha^4 - 3\alpha + 1 = (\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 2) - 1$$

dvs att

$$(\alpha - 1)((\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 2) \equiv 1 \pmod{\alpha^4 - 3\alpha + 1}$$

dvs att

$$(\alpha - 1)^{-1} = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 2.$$

6. Vi har att $f(x) = \sum_i (i+3)x^i = \sum_i (i+1)x^i + 2 \sum_i x^i = u(x)^2 + 2u(x)$ och att $g(x) = \sum_i (i^2 - 1)x^i = \sum_i (i+2)(i+1)x^i - 3 \sum_i (i+1)x^i = 2u(x)^3 - 3u(x)^2$. Således är

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= 2u(x)^5 + u(x)^4 - 6u(x)^3 \\ &= \sum_i \left(2 \binom{i+4}{4} + \binom{i+3}{3} - 6 \binom{i+2}{2} \right) x^i. \end{aligned}$$

Med lite räknande ser man att koefficienten framför x^i blir

$$\frac{1}{12}(i^4 + 12i^3 + 11i^2 - 36i - 36)$$

så att

$$f(x)g(x) = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{\infty} (i^4 + 12i^3 + 11i^2 - 36i - 36)x^i.$$

7. Sätt $f(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 3$, det givna polynomet. Vi ser att f saknar rationella nollställen ty den enda tänkbara kandidaterna är ± 1 och ± 3 och inget duger, så låt oss leta efter delare av grad 2. Genom inspektion ser vi att

$$f(x) = (x^2 + 3x - 1)(x^2 + x - 3).$$

Vi har att $x + 2 + 3x - 1 = (x + 3/2)^2 - 13/4$ så om vi utvidgar $\mathbb{Q}$ till $\mathbb{Q}(\alpha)$ där $\alpha^2 = 13/4$ får vi $x^2 + 3x - 1 = (x + 3/2 - \alpha)(x + 3/2 + \alpha)$ och dessutom att $x^2 + x - 3 = (x + 1/2)^2 - 13/4 = (x + 1/2 - \alpha)(x + 1/2 + \alpha)$.

Sammanfattningsvis gäller alltså att i $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ där $\alpha^2 = 13/4$ har vi $f(x) = (x + 3/2 + \alpha)(x + 3/2 - \alpha)(x + 1/2 + \alpha)(x + 1/2 - \alpha)$.

8. Den sökta summan är koefficienten framför x^n i potensserien $f(x)g(x)$ där

$$f(x) = \sum_i (i+1)3^{-i}x^i = u(x/3)^2$$

och

$$g(x) = \sum_i i4^{-i}x^i = u(x/4)^2 - u(x/4).$$

Således är

$$f(x)g(x) = \frac{1}{(1-x/3)^2} \left(\frac{1}{(1-x/4)^2} - \frac{1}{1-x/4} \right)$$

$$= \frac{A}{(1-x/3)^2} + \frac{B}{1-x/3} + \frac{C}{(1-x/4)^2} + \frac{D}{1-x/4}.$$

Med $x = 3$ ser vi att $A = 16 - 4 = 12$ och med $x = 4$ ser vi att $C = 9$. Vidare har med $x = 0$ att $A + B + C + D = 0$, dvs att $B + D = -21$, och med $x = 2$ att $9A + 4B + 4C + 2D = 18$, dvs att $4B + 2D = -126$. Tillsammans medför detta att $B = -42$ och $D = 21$. Allts gäller att

$$f(x)g(x) = 12u(x/3)^2 - 42u(x/3) + 9u(x/4)^2 + 21u(x/4)$$

$$= \sum_n [12(n+1)3^{-n} - 42 \cdot 3^{-n} + 9(n+1)4^{-n} + 21 \cdot 4^{-n}]x^n$$

så svaret är att den sökta summan blir koefficienten framför x^n dvs $(12n - 30)3^{-n} + (9n + 30)4^{-n}$.