MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 990529
Klockan: 8.45–13.45
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt:
Sebastian Sandberg, 0740-479626

Tentamensskrivning i MAN011 Aritmetik & Algebra, del 2

1. (a) Låt K vara en kropp. Vad menas med att vektorerna $v_1, \ldots, v_n$ i K^m är linjärt oberoende?

(b) Låt A vara en 2×2 matris med element i kroppen K med två skilda egenvärden λ_1, λ_2. Visa att om v_1 och v_2 är egenvektorer till respektive λ_1 och λ_2, så är de linjärt oberoende.

2. Formulera och bevisa faktorsatsen för polynom i $K[x]$, där K är en kropp.

3. Låt f vara ett polynom i $K[x]$, där K är en kropp. Visa att $g \in K[x]/f$ är inverterbart om och endast om $\text{sgd}(f, g) = 1$.

4. Visa att $\mathbb{Z}/5(\alpha)$, där $\alpha^3 = 3\alpha + 1$, är en kropp och invertera elementet $3 + 2\alpha + \alpha^2$.

5. Bestäm en så liten kropp K som möjligt, som innehåller $\mathbb{Z}/7$, sådan att polynomet $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 2 \in \mathbb{Z}/7[x]$ faktoriserar som en produkt av polynom av grad 1 i $K[x]$ och ange denna.

6. (a) Avgör om vektorerna $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -2, 3, -4)$ och $(2, 3, -1, -1) \in \mathbb{Q}^4$ är linjärt beroende. Skriv vektorn $(1, 9, -4, 11)$ som linjärkombination av de tre givna.

(b) Samma frågor om element uppfattas som tal i $\mathbb{Z}/7$.

7. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

har element i $\mathbb{Q}$. Bestäm en inverterbar matris C och en diagonal matris D, så att $A = CDC^{-1}$. Beräkna A^n for alla $n \in \mathbb{N}$. (4 p)

8. Hur många termer får man då man utvecklar $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$?

Tentan räknas vara färdigrättad fredagen den 4 juni. Tentor kan hämtas i mottagningsrummet kl 12.30–13.00 varje vardag.

Lycka till!

Jan Stevens